جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات



دراسة معمّقة في نظرية التوابع الناقصية
Deep Study in Elliptic Functions Theory

رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات

إعداد الطالب:
محمد سعود الكوسى

بإشراف الأستاذ المساعد الدكتور:
محمد الشيخ

1431 هـ - 2010 م

أعضاء لجنة الحكم:
أ.د. محمد غسان سنوبر – الأستاذ في قسم العلوم الأساسية- كلية الهندسة المدنية- جامعة دمشق.
أ.د. محمد بشير قابيل – الأستاذ في قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة دمشق.
أ.م.د. محمد الشيخ – الأستاذ المساعد في قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة دمشق.



جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات

دراسة معمّقة في نظرية التوابع الناقصية
Deep Study in Elliptic Functions Theory

رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات

إعداد الطالب:
محمد سعود الكوسى

بإشراف الأستاذ المساعد الدكتور:
محمد الشيخ

1431 هـ - 2010 م

أَعُوذُ بِاللهِ مِنَ الشَّيطَانِ الرَّجِيْمِ

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قُلْ إِنَّ صَلاَتِي وَنُسُكِي وَمَحْيَايَ وَمَمَاتِي لِلّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ{الأنعام/١٦٢}

لاَ شَرِيكَ لَهُ وَبِذَلِكَ أُمِرْتُ وَأَنَاْ أَوَّلُ الْمُسْلِمِينَ {الأنعام/١٦٣}

إهداء

إلى من كان و لا زال رفيقاً لي في دربي الطويل، إلى من علمني كيف تكون الحياة أخلاقاً و علماً، إلى ....

والدي

إلى من غمرتني بعطفها و حنانها، إلى المثل و القدوة في الصبر و الكفاح و حسن التدبير، إلى ...

والدتي

إلى الذين شاركوني أفراحي و أحزاني، إلى الذين عشت معهم طفولتي و شبابي، و عليهم أعلق آمالي، إلى ...

إخوتي و أخواتي

إلى من تكرّم علي منذ البداية و قبلني تلميذاً له، و شرفني بالإشراف على رسالتي، الأستاذ الدكتور محمد الشيخ.

إلى من كان لي بمثابة الأب و القدوة، إلى رجل العلم و الأخلاق، الأستاذ الدكتور محمد بشير قابيل.

شكر و تقدير

أستهل شكري بالثناء على من هو أهل لكل ثناء، فأشكر الله سبحانه و أحمده على إعانته لي في إتمام هذا العمل الذي أرجو أن يكون خالصاً لوجهه الكريم و أن يرزقني أجره.

و من بعده تعالى أتقدم بشكري و تقديري العميقين لأستاذي المشرف الدكتور محمد الشيخ، الذي تكرّم علي منذ البداية و قبلني تلميذاً له، و شرفني بالإشراف على هذه الرسالة، و على ما قدمه لي بكرمه و سعة صدره المعهودة من خدمات علمية أثرت هذا العمل، فجزاه الله خير الجزاء، و بارك له في دينه و دنياه.

و مما يشرفني أيضاً أن أتوجه بشكري و تقديري للأستاذ الدكتور محمد بشير قابيل، لتفضله بقبول مناقشة رسالتي و منحي جزءاً من وقته الثمين منذ البداية في سبيل إرشادي، و تصويب أخطائي، فجزاه الله عني خير الجزاء، و بارك فيه، و عجل في شفائه.

و مما يشرفني أيضاً أن أتقدم بشكري و عظيم امتناني للأستاذ الدكتور محمد غسان سنوبر، لتفضله أيضاً بقبول مناقشة رسالتي، و لإرشاداته القيّمة التي أفادتني في تقويم هفواتي التي فاتتني أو سهوت عنها، فجزاه الله عني خير الجزاء و بارك فيه.

كما أشكر أساتذتي أعضاء الهيئة التدريسية في قسم الرياضيات في جامعة دمشق على حسن رعايتهم، و تقديرهم فجزاهم الله خير الجزاء.

و مما يسعدني أن أتوجه بجزيل الشكر لأصدقاء كانوا لي بمثابة الإخوة، فلم يبخلوا علي بتقديم النصح و المساعدة، أخص منهم مع الاحتفاظ بالألقاب : محمد عمايري، طارق نبهاني، عبد اللطيف علاوي، ماجد ارحيم، لطفي السوقي، ....

كما أتقدم بشكري و عرفاني للبروفيسور[1] J.V.Armitage ، و الذي كانت بيني بينه سلسلة مراسلات استمرت لمدة عام و نصف تقريباً، أفادتني في فهم الكثير من الأمور، و كشف الغموض في عدة مبرهنات و علاقات متعلقة بموضوع الرسالة.

كما و أشكر البروفيسور P.L.Walker الذي زودني بمقالته [33]، و البرفيسور Robin Hankin الذي زودني بمقالته [37] ، و البروفيسور Wissam Raji الذي زودني بمقالته [49] ، .... فلهم مني جزيل الشكر و عظيم الامتنان.

محمد

[1] J.V.Armitage حالياً هو أستاذ فخري متقاعد في جامعة Durham في بريطانيا.

المحتويات:

مقدمة:

ارتبطت نظرية الدوال (التوابع[1]) الناقصية بالعديد من العلماء من أهمهم :
C.F. Gaus ،(1815-1897) K.Weierstrass ،(1804-1851) C. Jacobi ،(1802-1829) N. Abel
. (1777-1855)
وقد بدأ العمل الفعلي بهذه النظرية من قِبَل آبل و جاكوبي في عام 1826 و ظهرت نتائج دراسة آبل في كتابه(Studies on Elliptic Functions) و الذي نُشر في عام 1827 في Crelle's Journal .
و لقد أتت دراسة جاكوبي في وقت متزامن مع آبل مما أدى إلى تنافس شديد بينهما لمدة لم تطل ، و ذلك لوفاة آبل في عام 1829 . و حصل جاكوبي على دالته الناقصية الأولى sinamplitude z في عام 1829، و الذي اختصرها إلى sin am z ، و بعد ذلك رمزها C. Gudermann (1798-1852) بـ sn z ، و هذا هو الرمز الشائع و المستخدم في الوقت الحاضر .
و قد أورد جاكوبي دالته هذه في كتابه الشهير(fundamenta nova theoria functionum ellipticarum) ، الصادر في عام 1829.
كما أن Weierstrass قدم في عام 1862 دالته الناقصية:

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{w\in\Lambda\setminus\{0\}}\left[\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right]$$

حيث أن $\Lambda=\{w=mw_1+nw_2\,;m,n\in\mathbb{Z}\}$ و $w_1,w_2\in\mathbb{C}$ بحيث $(w_2/w_1)\notin\mathbb{R}$ و $\operatorname{Im}(w_2/w_1)>0$
و التي تدعى بدالة وايرشتراوس الناقصية ولها أيضاً دور هام وكبير في نظرية الدوال الناقصية.
ولقد تم التعرف في البداية على الدوال الناقصية باستخدام التكامل التالي :

$$x=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\quad ;\quad 0<y\le 1\,,0<k<1$$

و الذي يُدعى بالتكامل الناقصي النظامي من النوع الأول، بنفس الطريقة التي تم فيها التعرف على الدوال المثلثية حيث أنه في حالة $k=0$ يتم الحصول على الدوال المثلثية :

$$y=\sin x=sn(x,0)\ ,\ y=\cos x=cn(x,0)$$

و التكاملات الناقصية بدأت دراستها تقريباً في عام 1655 عندما بدأ العالم الرياضي J. Wallis(1616-1703) بدراسة طول قوس القطع الناقص فحصل على تكامل من الشكل : $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$ و الذي يُدعى بالتكامل الناقصي النظامي التام من النوع الثاني ومن هنا أتت تسمية هذه التكاملات لأنها ظهرت عند حساب طول قوس القطع الناقص.
و للتكاملات الناقصية العديد من التطبيقات على سبيل المثال في الرياضيات و الفيزياء: (أنظر [7])

- حساب طول قوس بعض المنحنيات في المستوي مثل القطع الناقص و الليمنسكات ....
- حساب مساحة سطح مجسم القطع الناقص في $\mathbb{R}^3$.
- في الحقول الكهربائية و المغناطيسية المرتبطة بمجسم القطع الناقص .
- عمر الكون في نموذج Friedmann (Age of the universe in Friedmann model) .
- الدورية للتذبذبات غير التوافقية (periodicity of anharmonic oscillators) .

و قد قام بدراسة التكاملات الناقصية العديد من العلماء من أهمهم :
L. Euler (1707-1783) ، J.L. Lagrange (1736-1813)، J. Landen (1719-1790)،
A.M. Legendre (1752-1833)، و العالم الرياضي الإيطالي C. Fagnano (1682-1764)، و هو الذي سمّى هذه التكاملات بالتكاملات الناقصية.
وقد عمل ليجاندر بعد أولر عدة سنوات على تطوير نظرية التكاملات الناقصية و لخص نتائج دراسته في كتاب (Exercises on Integral Calculus) ، و نُشر في عام (1811-1819) و صدرت الطبعة المنقحة لهذا الكتاب في عام (1827-1832) تحت إسم (Tretise on Elliptic Functions and Euler Integrals).
وقد احتوى هذا الكتاب على عدد كبير من النظريات في خصائص التكاملات الناقصية و تطبيقاتها.
و لقد حازت نظرية الدوال الناقصية في القرنين التاسع عشر و العشرون على الجزء الأكثر إهتماماً في التحليل العقدي، نظراً لأهميتها وتطبيقاتها الواسعة في فروع مختلفة من الرياضيات مثل الجبر و نظرية الأعداد و

[1] نود الإشارة إلى أننا آثرنا استخدام كلمة دالة بدلاً من تابع و اللتين هما ترجمة لكلمة واحدة هي function

الميكانيك و الإحصاء، وتستخدم أيضاً على نطاق واسع في مسائل التطبيقات المطابقة(Conformal Mapping) في الفيزياء، و في نظرية الدوال الهندسية (Geometric Function Theory) ، و في نظرية التقريبات ، و في العشرين سنة الأخيرة لعبت الدوال الناقصية دوراً هاماً في التبولوجيا، و في المعادلات التفاضلية الجزئية.
كما أن لها تطبيقات في الهندسة الكيميائية (Chemical Engineering) ، و في الأنظمة الديناميكية (Dynamical Systems)، و ميكانيك الكم (Quantum Mechanics)، و ميكانيك السوائل (Fluid Mechanics)، و لها أيضاً تطبيقات في نظرية النسبية العامة ، و التحليل العددي.
و لا تزال نظرية الدوال الناقصية و نظرية المنحنيات الناقصية elliptic curves (النظرية التوأم لنظرية الدوال الناقصية) مصدراً للعديد من الأبحاث و المسائل و المخمنات لكثير من الباحثين في مجالات عدة أهمها نظرية الأعداد و نظرية التشفير.

الملخص:

الدالة الناقصية هي بالتعريف دالة ميرومورفية في $\mathbb{C}$ ، وحيدة القيمة، مزدوجة الدورية.
و نقول عن الدالة الدورية $f(z)$ إنها مزدوجة الدورية إذا كان كل دور من أدوارها من الشكل $mw_1 + nw_2$ حيث $m,n \in \mathbb{Z}$ و $w_1,w_2 \in \mathbb{C}$ بحيث $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$.
و لقد حازت نظرية الدوال الناقصية في القرنين التاسع عشر و العشرون على الجزء الأكثر إهتماماً في التحليل العقدي، نظراً لأهميتها وتطبيقاتها الواسعة في فروع مختلفة من الرياضيات مثل الجبر و نظرية الأعداد و الميكانيك و الإحصاء، وتستخدم أيضاً على نطاق واسع في مسائل التطبيقات المطابقة(Conformal Mapping) في الفيزياء، و في نظرية الدوال الهندسية (Geometric Function Theory) ، و في نظرية التقريبات ، و في العشرين سنة الأخيرة لعبت الدوال الناقصية دوراً هاماً في التبولوجيا، و في المعادلات التفاضلية الجزئية.
كما أن لها تطبيقات في الهندسة الكيميائية (Chemical Engineering) ، و في الأنظمة الديناميكية (Dynamical Systems)، و ميكانيك الكم (Quantum Mechanics)، و ميكانيك السوائل(Fluid Mechanics)، و لها أيضاً تطبيقات في نظرية النسبية العامة ، و التحليل العددي.
و لا تزال نظرية الدوال الناقصية و نظرية المنحنيات الناقصية elliptic curves (النظرية التوأم لنظرية الدوال الناقصية) مصدراً للعديد من الأبحاث و المسائل و المخمنات لكثير من الباحثين في مجالات عدة أهمها نظرية الأعداد و نظرية التشفير.

و في هذه الأطروحة المقدمة قمنا بدراسة معمقة لنظرية الدوال الناقصية، بهدف تقديم دراسة مرجعية معمقة لإحدى النظريات الهامة في التحليل العقدي ، لما لها من أهمية كبيرة في فروع مختلفة كما ذكرنا أعلاه، و بحيث يتم في هذه الدراسة عرض و ترتيب المفاهيم و النظريات و النتائج و الأفكار المتعلقة بهذه النظرية التي تتصف بصعوبتها و كثرة الصيغ و العلاقات فيها، و المطروحة في معظم المراجع بأسلوب يصعب على الكثير من الباحثين في مجالات عدة الإحاطة و الفهم الدقيق و الوصول بسهولة لما يلزم من هذه النظرية في دراستهم و التي لا تتم من دونها.
كما أن هذه الدراسة أتت كمحاولة لإيجاد صيغة واضحة (دستور) تعطي جذور المعادلة الجبرية من الدرجة الخامسة بشكلها العام و الغير قابلة للحل جبرياً كما أثبت آبل، بدلالة الدوال الناقصية و ما يتعلق بها، و قد تم في الفصل السابع عرض و دراسة طريقة حل المعادلة من الدرجة الخامسة بشكلها العام بعد دراسة أهم مرجعين درسا هذه الطريقة ([3] ، [30]) ، إلا أنه لم يتم التوصل إلى الصيغة المنشودة إذ أنها زالت هدفاً لنا و لكثير من الباحثين في هذا المجال.
و اشتملت هذه الأطروحة على سبعة فصول بالإضافة إلى **فصل بداية** الذي تم فيه عرض أهم التعاريف و المبرهنات و النتائج في التحليل العقدي و التي ستلزم لدراستنا اللاحقة.

و في **الفصل الأول** تمت دراسة النواس البسيط و المدخل إلى الدوال و التكاملات الناقصية.

أما في **الفصل الثاني** فقد تمت دراسة الخصائص العامة للدوال الناقصية، و التي من أهمها:
- إن الدالة الناقصية الصحيحة هي دالة ثابتة. (مبرهنة ليوفيل)
- إن عدد الأقطاب و الأصفار للدالة الناقصية في أي خلية P_a [1] هو عدد منته.
- إن مجموع رواسب الدالة الناقصية عند الأقطاب الموجودة داخل الخلية P_a يساوي الصفر.

و في **الفصل الثالث** تمت دراسة دوال جاكوبي الناقصية .
حيث أنه تم في البداية دراسة تحويل جاكوبي التخيلي للدوال sn, cn, dn ، و عرض صيغ الإضافة الخاصة بها. و عن طريق تحويل جاكوبي التخيلي و صيغ الإضافة تم تعريف الدوال $sn(z), cn(z), dn(z)$ من أجل $z \in \mathbb{C}$.
و بعدها تمت دراسة الخصائص الدورية لدوال جاكوبي الناقصية sn, cn, dn و رأينا أنها مزدوجة الدورية.

[1] a نقطة يتم اختيارها بحيث لا يوجد أي قطب للدالة الناقصية على محيط متوازي الأضلاع الذي رؤوسه عند النقاط $a, a+w_1, a+w_1+w_2, a+w_2$ ، و الذي يدعى مع المنطقة التي يحيط بها خلية (cell) و نرمز لها بـ P_a . و يكفي دراسة سلوك الدالة الناقصية في خلية واحدة مثل P_a .

و بعدها تمت دراسة النقاط الشاذة لدوال جاكوبي الناقصية و تصنيفاتها، و دراسة أصفار هذه الدوال، و نشر فورييه و تايلور لها.
و تمت في النهاية دراسة صيغ كارلسون (Bill C.Carlson) لدوال جاكوبي الناقصية الاثنتي عشر، و يعتبر كارلسون في الوقت الحاضر أحد أكثر الباحثين في نظرية التكاملات و الدوال الناقصية.

في **الفصل الرابع** قمنا بدراسة مفصلة للدوال ثيتا $\theta_j(z)$ ، حيث $j=1,2,3,4$ و $z\in\mathbb{C}$.
و هي دوال تحليلية على كامل المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ، شبه مزدوجة الدورية ، و قد كان لهذه الدوال في القرن التاسع عشر الدور الأساسي لدى الرياضيين في دراسة الدوال الناقصية. و يعتبر جاكوبي أول من درس هذه الدوال بشكل معمّق و كانت أداته الأساسية في عمله في نظرية الدوال الناقصية.
و في هذا الفصل تم:

- كتابة الدوال ثيتا على شكل جداءات غير منتهية و دراسة خصائصها بالتفصيل، و علاقتها مع دوال جاكوبي الناقصية.
- دراسة صيغ شبه الإضافة لهذه الدوال، حيث أنه تم إيجاد $\theta_j^{\,2}\theta_r(z_1+z_2)\theta_r(z_1-z_2)$ بدلالة الدوال $\theta_s(z_1),\theta_s(z_2)$ ، و ذلك مهما تكن $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ و $r=1,2,3,4$ ، $j=2,3,4$ و $s=1,2,3,4$.
- دراسة تحويل جاكوبي التخيلي، و تحويل لاندن، و المعادلات التفاضلية التي تحققها هذه الدوال.
- عرض تعريف و بناء دوال جاكوبي الناقصية و استنتاج الخواص و العلاقات الأساسية التي تحققها عن طريق الدوال ثيتا و ما تحققه من خصائص و علاقات.
- عرض مقدمة في نظرية التحويلات للدوال ثيتا. حيث أنه تمت دراسة العلاقة بين $\theta_1(z\,|\,\tau)$ و $\theta_1\left(\dfrac{z}{c\tau+d}\,|\,\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ ، و ذلك مهما تكن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$ ، $\tau\in\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im}(z)>0\}$.
- دراسة دالة ديدكند- إيتا ، و الدوال $f\ ,f_1,f_2$ حيث كان لهذه الدوال دور هام في دراستنا في الفصل السابع.
- و أخيراً دراسة العلاقة بين نظرية الدوال الناقصية و نظرية الأعداد، فقد تمت دراسة مسألة التمثيل للأعداد الصحيحة الموجبة على شكل مجموع مربعين، و أيضاً على شكل مجموع أربع مربعات لأعداد صحيحة.

و في **الفصل الخامس** تمت دراسة دالة وايرشتراوس الناقصية $\wp(z)$ بالتفصيل، و اشتمل هذا الفصل على ثلاث فقرات أساسية أولها بناء دالة وايرشتراوس الناقصية ودراسة أهم الخصائص و العلاقات التي تحققها، و العلاقة بينها و بين دوال جاكوبي الناقصية، و ثانيها دراسة الدوال و الأشكال المعيارية، و ثالثها دراسة مسألة العكس في نظرية الدوال الناقصية و التي تنص على أنه إذا كان $m\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ عدداً معطى عندئذ فإنه يوجد $\tau\in\mathcal{H}$ بحيث يكون $k^2(\tau)=m$. و قمنا بتقديم إثبات مبسط لهذه المسألة من أجل $m\in\mathbb{C}\setminus\{0,1,2,1/2\}$ دون التعرض للمفاهيم التي تم التطرق لها بالإثبات في مراجع عدة مثل التمديد التحليلي و سطوح ريمان. (أنظر [54])

و عرضنا في **الفصل السادس** التكاملات الناقصية و تم مناقشة الأشكال المختلفة لهذه التكاملات و العلاقة فيما بينها.
(تكاملات ليجاندر الناقصية و الناقصية النظامية من النوع الأول و الثاني و الثالث، و تكاملات وايرشتراوس الناقصية النظامية).
و تم عرض إثبات المبرهنة الأساسية في نظرية التكاملات الناقصية و التي تتلخص بأن أي تكامل ناقصي يمكن كتابته على شكل مجموع منته لدوال إبتدائية و لتكاملات ليجاندر الناقصية، أو لتكاملات ليجاندر الناقصية النظامية، أو لتكاملات وايرشتراوس الناقصية النظامية.

و خصصنا **فصلنا الأخير** لدراسة أحد أهم التطبيقات لنظرية الدوال الناقصية في الجبر و هو حل المعادلة الجبرية ذات الدرجة الخامسة بشكلها العام (quintic equation)، و قد كان هذا الموضوع أحد المواضيع التي كان لها إنتشار واسع و اهتمام مركز في الرياضيات، حيث أن هذه المعادلة غير قابلة للحل جبرياً على خلاف معادلة الدرجة الثانية و الثالثة و الرابعة.

Abstract :

The elliptic function, by definition is meromorphic function in $\mathbb{C}$, unique value, doubly periodic. We say that the periodic function $f(z)$ is doubly periodic if any period of its periods has the form $mw_1 + nw_2$, where $m,n \in \mathbb{Z}$, and $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ with $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$.
The theory of elliptic functions had received high interest mostly in the complex analysis due to its importance and its widen applications in various branches of Mathematics like algebra, numbers theory, mechanics, and statistics, in the 19th and 20th century, also, it's used extensively in conformal mapping in physics, in geometric function theory, and in approximation theory.
In the last 20 years, the elliptic functions has played a very important role in the topology, and in partial differential equations, also, it has applications in chemical engineering, dynamical systems, quantum mechanics, fluid mechanics, general relativity, and numerical analysis too.
The elliptic functions theory and the elliptic curves, the twins theory of the elliptic functions, are still the main resource of many researches, problems, and conjectures for many researchers in many fields mainly the numbers theory and cryptography.

In this dissertation we have studied in depth the elliptic functions theory, which includes seven chapters and the elementary chapter. We showed the most important definitions, theorems, and results in complex analysis in the elementary chapter, which we will need into our further study.

In the **first chapter**, we studied the simple pendulum and the introduction of the elliptic functions and integrals.

In the **second chapter**, we studied the general properties of elliptic functions, and we saw that:

- The entire elliptic function is constant. (Liouville's theorem)
- The number of poles and zeros of an elliptic function in any cell P_a is finite. (a is a point, where no poles of elliptic function on the boundary of parallelogram which vertices in the points $a, a+w_1, a+w_1+w_2, a+w_2$, this parallelogram with the area which is surrounded by, is called cell, which is symbolized by P_a. Studying the behavior of the elliptic function in one cell like P_a is enough)
- The sum of the residues of an elliptic function inside any cell P_a is equal zero.

In the **chapter three**, we studied Jacobi elliptic functions, where in the beginning we studied Jacobi imaginary transformation of the functions sn, cn, dn , and addition formulas for these functions.
Through the Jacobi imaginary transformation and addition formulas we saw the definition of functions $sn(z), cn(z), dn(z)$, for $z \in \mathbb{C}$.
After that, we studied the general properties of Jacobi elliptic functions sn, cn, dn and we saw that they are doubly periodic.
Finally, we studied Carlson's formulas of the twelve Jacobi elliptic functions.

Carlson is considered one of the most researchers of the elliptic functions and integrals these days.

In the **fourth chapter**, we studied in details theta functions $\theta_j(z)$ where $j = 1, 2, 3, 4$ and $z \in \mathbb{C}$. Theta functions are entire functions in $\mathbb{C}$, quasidoubly-periodic.
In the 19th century, these functions had the main role for mathematicians in studying the elliptic functions, and Jacobi is considered the first one who studied these functions in depth and his main tool in his research was the elliptic functions theory.
In this chapter we have done:

- Write theta functions as infinite products, and study in details their properties, its relation with Jacobi elliptic functions.
- Study the pseudo-addition formulae of these functions, where we found $\theta_j^2 \theta_r(z_1 + z_2)\theta_r(z_1 - z_2)$, for any $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $r = 1, 2, 3, 4$, $j = 2, 3, 4$, $s = 1, 2, 3, 4$.
- Study Jacobi imaginary transformation, Landen transformation, and the differential equations which satisfy by these functions.
- Showing define and structure the Jacobi elliptic functions and concluded the properties and the fundamental relations which are achieved through theta functions and what it accomplishes of properties and relations.
- Putting introduction to transformation theory of theta functions, where we studied the relation between $\theta_1(z\,|\,\tau)$ and $\theta_1\left(\frac{z}{c\tau+d}\,|\,\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$,

  for all $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, and $\tau \in \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$.
- Study the Dedekind-eta function, and the functions f , f_1, f_2 , which had a very important role in our study in the seventh chapter.
- Finally, we studied the relation between the elliptic functions and numbers theory. We had studied the problem of representation of positive integers as sum of two squares, and as sum of four squares of positive integers.

In the **fifth chapter**, we studied the Weierstrass elliptic function $\wp(z)$ in details and this chapter included of three main paragraphs.
Paragraph number one, we studied the structure of Weierstrass elliptic function, the important properties, the relations of this function, and we studied the relation between Weierstrass function and Jacobi elliptic functions, in the second paragraph, we studied modular functions and modular forms, and in the third paragraph we studied the inversion problem in elliptic functions theory,which is:
If $m \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ is given number, then there exist $\tau \in \mathcal{H}$, such that, $k^2(\tau) = m$, and we introduced a simple proof for this problem, when $m \in \mathbb{C} \setminus \{0,1,2,1/2\}$, without depending on many non simple notions in complex analysis, for example analytic continuation and Riemann surfaces.(see [54])

In the **6th chapter**, we showed the elliptic integrals and we discussed the different forms of these integrals and the relation between them.
We showed the proof of the fundamental theorem in elliptic integrals theory which the main point of it is:

any elliptic integral can be written as infinite sum of elementary functions and of Legendre (or Legendre normal) elliptic integrals, or of Weiestrass normal elliptic integrals.

In the **7th chapter**, we studied one of the most important applications of the elliptic functions theory in Algebra, which is the solution of quintic equation.
This subject was one of the widely spread subjects and focused interest in mathematics. This equation is not algebraically solvable in contrast of quadratic, cubic, quartic equation.

"الفصل البداية"

سنعرض في هذا الفصل التعاريف الأساسية و أهم المبرهنات و النتائج في التحليل العقدي و التي سنعتمد عليها في دراستنا اللاحقة ، لكن دون التعرض لإثباتها، و قد تم الاعتماد في هذا الفصل على المراجع التالية:
53 ,52, 51, 39, 38, 35, 29, 24, 23, 21, 20, 12, 11, 2

(0.1) تعاريف و مبرهنات:

نقطة التجمع[1] (accumulation point) **:**

لتكن $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{C}$. نقول عن $a \in \mathbb{C}$ إنها نقطة تجمع لـ D إذا تحقق أن : $\forall r > 0; D'(a,r) \bigcap D \neq \varnothing$.

حيث أن $D'(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\}$

(0.1.1) مبرهنة:

كل جوار لنقطة تجمع a لمجموعة $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{C}$ يحوي عدداً غير منته من نقاط D.

نستنتج من هذه المبرهنة أنه لا يمكن أن يوجد لمجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{C}$ أي نقطة تجمع في $\mathbb{C}$.

(0.1.2) مبرهنة:

إذا كانت $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{C}$ مجموعة ما . عندئذ فإن النقطة a هي نقطة تجمع لـ D إذا وفقط إذا وُجدت متتالية $\{z_n\}$ من النقاط المختلفة من D متقاربة إلى a .

(0.1.3) تعريف:

لتكن $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ مجموعة مفتوحة ، و لتكن $f : \Omega \to \mathbb{C}$، و لتكن $z_0 \in \Omega$. إذا كانت

النهاية $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ موجودة ، فإننا نرمز لها بـ $f'(z_0)$ و ندعوها مشتق الدالة f عند z_0 .

و إذا كانت $f'(z_0)$ موجودة من أجل أي $z \in \Omega$ فإننا نقول إن f تحليلية في Ω.

نقول عن الدالة $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ إنها دالة صحيحة (entire function) إذا كانت تحليلية في كامل المستوي العقدي.

من التعريف نجد أن الدالة الصحيحة يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ مركزها نقطة المبدأ و نصف قطر تقاربها يساوي ∞، ندعوها بالمتسلسلة الصحيحة .

(0.1.4) مبرهنة ليوفيل: (J.Liouville 1809-1882) .

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية و محدودة على كامل المستوي $\mathbb{C}$ فإنها ستكون ثابتة .

---

[1] بعض المراجع تعرف نقطة التجمع على الشكل التالي : نقول عن النقطة a إنها نقطة تجمع لـ D إذا كان كل جوار لـ a يحوي عدداً غير منته من النقاط المختلفة من D . أنظر [24],pp.42 .

(0.2) المتتاليات و المتسلسلات الدالية: [11],pp.106-109

لتكن D مجموعة جزئية و غير خالية من $\mathbb{C}$ ، سنرمز بـ $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ لمجموعة الدوال العقدية التي منطلقها D.

(0.2.1) تعاريف:

لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$.

(1) نقول إن المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب ببساطة إلى دالة $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall z \in D ; \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

و نسمي f النهاية البسيطة لمتتالية الدوال $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و نكتب $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{s}{=} f$.

(2) نقول إن المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام إلى دالة $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists N \in \mathbb{N} ; \left| f(z) - f_n(z) \right| < \varepsilon$$

من أجل كل $n \geq N$ و كل $z \in D$ و N لا يعتمد على z .

و نسمي f النهاية المنتظمة لمتتالية الدوال $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و نكتب $\lim_{n\to\infty} f_n \overset{u}{=} f$.

(3) نقول عن المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها متقاربة بانتظام في كل مجموعة متراصة جزئية من D إلى دالة $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ إذا كانت المتتالية $\left(f_n\big|_{K}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام و ذلك أياً كانت المجموعة المتراصة K الجزئية من D. حيث $f_n\big|_{K}$ هي مقصور f_n على المجموعة K.

(4) نقول عن المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إنها متقاربة بانتظام محلياً في D (locally uniformaly) إذا وُجد لأجل كل نقطة $a \in D$ جوار U بحيث تكون المتتالية $\left(f_n\big|_{U\cap D}\right)$ متقاربة بانتظام.

و عندما تكون المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام محلياً في D فإنها ستكون متقاربة بانتظام في كل مجموعة متراصة جزئية من D.

(0.2.2) ملاحظة:

إن التقارب المنتظم لمتتالية الدوال $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ نحو دالة $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ يقتضي تقاربها المنتظم في كل مجموعة متراصة جزئية من D نحو f ، إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة .

(0.2.3) مبرهنة:

لتكن $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ مجموعة مفتوحة، و لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من الدوال التحليلية و المتقاربة بانتظام محلياً إلى دالة f في Ω. عندئذ فإن الدالة f تحليلية و المتتالية $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة بانتظام محلياً إلى f' .

(0.2.4) تعريف:

لتكن $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ، و لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$.

نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ إنها تتقارب ببساطة (بانتظام، بانتظام محلياً على الترتيب) ، إذا و فقط إذا تقاربت متتالية الدوال $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (حيث أن $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$) ببساطة (بانتظام، بانتظام محلياً على الترتيب).

(0.2.5) إختبار وايرشتراوس- M في التقارب المنتظم:

لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ ، حيث أن $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{C}$ مجموعة ما، و لتكن $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة، فإذا كانت $|f_n(z)| \leq M_n$ من أجل كل $z \in D$ و $n \geq 1$ ، و بحيث M_n لا تعتمد على z في D ، و كانت $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ متقاربة. عندئذ فإن $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة بانتظام و بالإطلاق على D.

(0.2.6) تعريف:

لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$. نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ إنها متقاربة بالنظيم (normally convergent) في D ، إذا وُجد من أجل كل نقطة $a \in D$ جوار U و متتالية من الأعداد الحقيقية الموجبة $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ بحيث تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ متقاربة ، و الشرط الآتي محققاً:

$$|f_n(z)| \leq M_n \,;\forall z \in U \bigcap D \,;\forall n \geq 0$$

(0.2.7) ملاحظة:

إذا كانت $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ ، و كانت $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة بالنظيم عندئذ فإنها متقاربة بالإطلاق و بانتظام محلياً في D.

(0.2.8) مبرهنة:

لتكن $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ منطقة (مفتوحة و مترابطة) و لتكن (f_n) متتالية من الدوال التحليلية في Ω ، و لنفرض أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة بانتظام محلياً في Ω.عندئذ يكون مجموعها $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ دالة تحليلية في Ω ،

و يكون[1] : $\overset{(k)}{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(k)}{f}_n(z) \,;\forall k \in \mathbb{N}^* , \forall z \in \Omega$

و كل متسلسلة مشتقة أيضاً ستكون متقاربة بانتظام محلياً في Ω.

(0.3) الجداءات غير المنتهية: (Infinite Products)

(0.3.1) تعريف:

⊛ لتكن $(z_n)_{n\geq 1}$ متتالية من الأعداد العقدية، و لتكن $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+z_k)$. نقول عن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ إنه متقارب إلى P و نكتب $P = \prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ ، إذا كانت المتتالية $(P_n)_{n\geq 1}$ متقاربة إلى P.

⊛ نقول عن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n)$ إنه متقارب بالإطلاق إذا كان الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|)$ متقارباً .

(0.3.2) مبرهنة:

ليكن $z_n \neq -1 \; (n=1,2,...)$ عندئذ:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|z_n|) \text{ متقارب } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|z_n| \text{ متقاربة}$$

---

[1] $\overset{(0)}{f}_n(z) = f_n(z) \,,\, \overset{(k)}{f}_n(z) = \dfrac{d^k}{dz^k} f_n(z) \,; k \geq 1$

(0.3.3) تعريف:

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الدوال المعرفة في المنطقة $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ، نقول عن الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n]$ إنه متقارب بانتظام في Ω إذا وفقط إذا تحقق:

(1) يوجد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث $f_n(z) \neq -1$ من أجل كل $n > N$ و من أجل كل $z \in \Omega$.

(2) المتتالية $\prod_{k=N+1}^{n}[1+f_k]$ متقاربة بانتظام في Ω إلى دالة $g(z)$ ، حيث أن $g(z) \neq 0$ من أجل كل $z \in \Omega$.

(0.3.4) مبرهنة: M-test for the convergence of a product .

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الدوال المعرفة في المنطقة $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ، و لنفرض وجود متتالية حقيقية $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث $|f_n(z)| \leq M_n$ من أجل كل $z \in \Omega$ و كل $n \geq 1$ ، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة. عندئذ فإن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n]$ متقارب بانتظام في Ω .

و إذا كان $f = \prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n]$ و كانت كل دالة $f_n\ (n=1,2,...)$ تحليلية في Ω عندئذ فإن f تحليلية في Ω.

(0.3.5) مبرهنة:

إذا كانت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من الدوال التحليلية في منطقة $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ و كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ متقاربة بانتظام في كل مجموعة متراصة جزئية من Ω . عندئذ فإن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n]$ متقارب بانتظام في كل مجموعة متراصة جزئية من Ω ، و يمثل دالة تحليلية في Ω.

(0.4) الدوال الميرومورفية: meromorphic functions

(0.4.1) تعريف الدالة الميرومورفية:

لتكن $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ مجموعة مفتوحة، و لتكن P مجموعة جزئية من Ω، و لتكن $f : \Omega \setminus P \to \mathbb{C}$ دالة عقدية .
نقول إن f ميرومورفية في Ω أقطابها هي نقاط المجموعة P إذا تحققت الشروط التالية:

- لا يوجد في Ω أي نقطة تجمع لـ P . أي $\forall w \in \Omega; \exists \varepsilon > 0; D'(w,\varepsilon) \cap P = \varnothing$.
- الدالة f تحليلية على $\Omega \setminus P$.
- كل نقطة من P هي قطب للدالة f .

و نقول عن الدالة f إنها ميرومورفية عند النقطة z_0 ، إذا كانت ميرومورفية في مجموعة مفتوحة U تحوي z_0 .
و إذا كانت $f \neq 0$ ميرومورفية في Ω و $N \subset \Omega$ مجموعة أصفارها. عندئذ فإنه لا يوجد في Ω أي نقطة تجمع لـ N ، أي أن نقاط المجموعة N معزولة.
و يُبرهَن أن كل دالة f ميرومورفية في Ω يمكن كتابتها بالشكل $f = g/h$ ، حيث أن f و g دالتان تحليليتان على Ω.

(0.4.2) تعريف:

ليكن γ طريقاً مغلقاً في $\mathbb{C}$ ، و ليكن z_0 عنصراً من $\mathbb{C}$ لا ينتمي إلى γ .

نسمي دليل γ بالنسبة إلى z_0 العدد $Ind(\gamma, z_0)$ المعرّف بالمساواة : $Ind(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-z_0}$.

و هذا التعريف للمقدار $Ind(\gamma, z_0)$ هو الصياغة الرياضية لما يُسمّى العدد الجبري للمرات التي يدور فيها الطريق γ حول النقطة z_0 .

(0.4.3) مبرهنة الرواسب:

لتكن $\varnothing \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ منطقة، و لتكن f دالة تحليلية في $\Omega \setminus \{p_1, ..., p_n\}$ حيث أن $p_1, p_2, ..., p_n$ من Ω تمثل نقاطاً شاذة للدالة f ، و ليكن γ طريقاً مغلقاً في Ω لا يمر بأي نقطة من النقاط p_k $(k = 1, ..., n)$ و $\gamma \sim 0$ في Ω (γ مشوه مستمر لنقطة في Ω). عندئذ فإن:

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, p_k) . Ind(\gamma, p_k)$$

(0.4.4) مبرهنة:

لتكن f دالة ميرومورفية في Ω ، لتكن $p_1, ..., p_m$ أقطاباً لـ f و $z_1, ..., z_n$ أصفاراً لها مع أخذ مراتب الأصفار و الأقطاب بعين الإعتبار في العد[1]، و γ منحنياً مغلقاً أملس قطعياً في Ω بحيث $\gamma \sim 0$ في Ω، و لا يمر بأية نقطة من النقاط $z_1, ..., z_n ; p_1, ..., p_m$. عندئذ:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{n} Ind(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^{m} Ind(\gamma, p_j)$$

حالة خاصة:

إذا كان γ طريقاً مغلقاً بسيطاً موجهاً عكس عقارب الساعة يقع داخل Ω و النقاط $z_1, ..., z_n ; p_1, ..., p_m$ تقع داخل الطريق γ و لا يمر بأي نقطة منها . عندئذ: $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f$.

حيث أن N_f تدل على عدد الأصفار و P_f تدل على عدد الأقطاب للدالة f (مع أخذ المراتب للأقطاب و الأصفار بعين الإعتبار في العد) .

(0.4.5) مبرهنة:

لتكن f دالة ميرومورفية في Ω ، و لتكن $p_1, ..., p_m$ أقطاباً لـ f و $z_1, ..., z_n$ أصفاراً لها مع الأخذ بمراتب الأصفار و الأقطاب بعين الإعتبار في العد ، و إذا كانت g دالة تحليلية في Ω ، و γ منحنياً مغلقاً أملس قطعياً في Ω بحيث $\gamma \sim 0$ في Ω و لا يمر بأية نقطة من النقاط $z_1, ..., z_n ; p_1, ..., p_m$. عندئذ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) . \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{n} g(z_k) Ind(\gamma, z_k) - \sum_{j=1}^{m} g(p_j) Ind(\gamma, p_j)$$

حالة خاصة:

إذا كان γ طريقاً مغلقاً بسيطاً موجهاً عكس عقارب الساعة يقع داخل Ω و النقاط $z_1, ..., z_n ; p_1, ..., p_m$ تقع داخل الطريق γ و لا يمر بأي نقطة منها، و بأخذ $g(z) = z$ نجد أن:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma z . \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (z_1 + ... + z_n) - (p_1 + ... + p_m)$$

[1] نعني بذلك أنه إذا كان القطب على سبيل المثال من المرتبة l فإنه يُعَد l قطباً و كذلك بالنسبة للأصفار

(0.5) نشر فورييه[1] للدوال العقدية:

لتكن Ω منطقة في المستوي- z ، و لتكن $w \in \mathbb{R}^*$ بحيث مهما يكن $z \in \Omega$ فإن $z \mp w \in \Omega$ ، ولتكن Ω' في المستوي- ζ صورة المنطقة Ω وفق الدالة $\zeta = e^{2\pi i z/w}$.

عندئذ إذا كانت Ω هي كامل المستوي العقدي $\mathbb{C}$ فإن Ω' هي $\mathbb{C}^*$.

و إذا كانت Ω هي الشريط المعرف بالشكل : $a < \operatorname{Im}(2\pi z/w) < b \; ; a,b \in \mathbb{R}$ ، فإن Ω' ستكون الحلقة $e^{-b} < |\zeta| < e^{-a}$.

و لتكن $f(z)$ دالة ميرومورفية في Ω و دورية[2] دورها $w \in \mathbb{R}^*$ ، عندئذ يوجد دالة وحيدة F مُعرفة على Ω' بحيث $f(z) = F\left(e^{2\pi i z/w}\right) = F(\zeta)$.

و لنفرض وجود عددين حقيقيين r_1, r_2 بحيث يكون $e^{-b} < r_1 < r_2 < e^{-a}$ ، و بحيث لا تملك الدالة F أي قطب في الحلقة $r_1 < |\zeta| < r_2$ ، و منه فإنه يمكن نشر F وفق لوران في هذه الحلقة بالشكل $F(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \zeta^n$.

أي: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z/w}$. و هذا هو نشر فورييه للدالة $f(z)$.

و هذا النشر صحيح في الشريط المقابل للحلقة $r_1 < |\zeta| < r_2$ (أي في الشريط الذي تكون صورته وفق $\zeta = e^{2\pi i z/w}$ هي الحلقة $r_1 < |\zeta| < r_2$).

و المعاملات c_n تُعطى بالشكل :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} F(\zeta) \zeta^{-n-1} d\zeta \; ; r_1 < r < r_2 \; .$$

و بتغيير المتحول نجد أن: $c_n = \dfrac{1}{w} \int_a^{a+w} f(z) e^{-2\pi i n z/w} \, dz$

حيث أن a هي نقطة إختيارية من الشريط الذي يكون فيه النشر لـ $f(z)$ صحيحاً ، و التكامل مأخوذ على أي طريق بدايته a و نهايته $a+w$ بحيث يبقى هذا الطريق داخل الشريط .

و يمكننا أيضاً أن نكتب النشر بالشكل التالي:

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n z/w) + b_n \sin(2\pi n z/w)$$

و المعاملات b_n, a_n, a_0 تُعطى بالعلاقات :

$$a_0 = \frac{2}{w} \int_a^{a+w} f(z) dz$$

$$\forall n \geq 1 \; ; a_n = \frac{2}{w} \int_a^{a+w} f(z) \cos(2\pi n z/w) dz$$

$$\forall n \geq 1 \; ; b_n = \frac{2}{w} \int_a^{a+w} f(z) \sin(2\pi n z/w) dz$$

---

[1] J.Fourier 1768-1830

[2] نقول عن الدالة العقدية $f(z)$ إنها دورية دورها $w \in \mathbb{C}$ ، إذا و فقط إذا كان $f(z+w) = f(z)$ من أجل كل z و $z+w$ تنتمي إلى مجموعة تعريف f .

"الفصل الأول"

النواس البسيط و المدخل إلى الدوال و التكاملات الناقصية

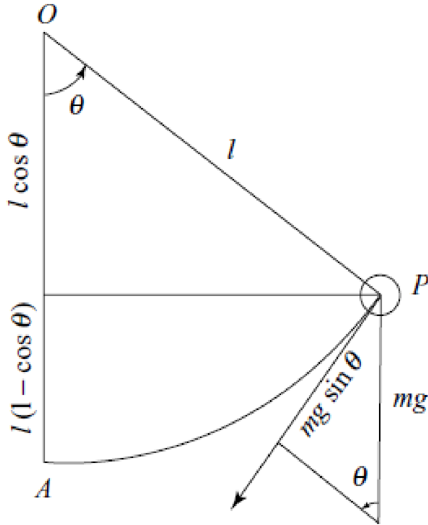
في هذا الفصل تم الاعتماد على المراجع التالية: 50, 28, 27, 22, 18, 13, 3

(1.1) النواس البسيط:

يتألف النواس البسيط من ثقل كتلته m ، معلق بنهاية خيط أو قضيب مُهمل الكتلة طوله l (ثابت) ، و النهاية الأخرى للقضيب معلقة بنقطة مُثبتة O .

و سندرس الآن مسألة تحديد الزاوية θ (θ هي الزاوية التي يصنعها القضيب مع الشاقول) كتابع للزمن t ، بحيث $\theta = 0$ عندما $t = 0$ ، الشكل(1.1).

و سوف نعتبر فقط الحركات للنواس التي يكون فيها القضيب في المستوي الشاقولي .



الشكل (1.1)

لدينا سرعة ثقل النواس: $\frac{d}{dt}(l\theta) = l\,\frac{d\theta}{dt}$

و القوة $m\vec{g}$ المؤثرة على ثقل النواس و المتجهة نحو الأسفل مركبتها المماسية هي $-mg\sin\theta$

و منه حسب قانون نيوتن الثاني نجد أن:

$$m\Gamma = -mg\sin\theta$$

(حيث Γ تشير إلى التسارع المماسي،

و g ثابت تسارع الجاذبية الأرضية)

أي: $m\left(\frac{d}{dt}l\,\frac{d\theta}{dt}\right) = -mg\sin\theta$

و منه فإن :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad .... \ (1.1)$$

عندما تكون الزاوية θ صغيرة كفاية أي $\theta \ll 1$ فإن $\sin\theta \approx \theta$

ومنه فإن (1.1) تصبح بالشكل $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$ ، و هذه المعادلة هي تفاضلية خطية من المرتبة الثانية،

حلها سيكون بالشكل : $\theta = A\cos\sqrt{g/l}\;t + B\sin\sqrt{g/l}\;t$

حيث أن A, B ثابتان كيفيان يمكن تعيينهما من شروط بدء معينة .

و الحركة ستكون توافقية[1] دورها $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

---

[1] يكون لنقطة مادية M حركة توافقية على مسار ما مستقيم أو منحني ، إذا كانت معادلتها الزمنية من الشكل : $s = a\cos(wt - \varphi)$. بفرض أن a, w, φ هي مقادير ثابتة .

أما إذا لم تكن θ صغيرة بحيث $\sin\theta \not\approx \theta$ ، فإنه بوضع $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ و باعتبار أن $\dot{\theta}$ تابع لـ θ و ليس لـ t ، نجد أن :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)$$

و منه فإن (1.1) تصبح بالشكل :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad .... (1.2)$$

بمكاملة (1.2) بالنسبة لـ θ نجد أن:

$\dfrac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \dfrac{g}{l}\cos\theta = E_1$ ، (حيث أن E_1 هو ثابت المكاملة).

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بـ $0 \neq ml^2$ ، و بوضع $E := E_1 ml^2$ نجد أن :

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - m\,\mathrm{g}\,l\cos\theta = E \qquad .... (1.3)$$

و E ثابت يمثل الطاقة الكلية لثقل النواس ، و الحد $\dfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ يمثل الطاقة الحركية ، و $-mgl\cos\theta$ يمثل الطاقة الكامنة مُقاسة من وضع التوازن A .

⊛ إن الطاقة المطلوبة لرفع ثقل النواس من وضع التوازن A أي $\theta = 0$ إلى الموضع الذي تكون فيه $\theta = \pi$ هي $2mgl$ و بالتالي فإنه يمكننا أن نكتب : $E = k^2(2mgl)$ حيث $k \geq 0$.

لنفرض أن $0 < k < 1$ ، أي أن $E < 2mgl$ و هذه هي الحالة التي تكون فيها حركة النواس تذبذبية .

(في الحالة $k = 0$ أي $E = 0$ يكون ثقل النواس في موضع التوازن A ، و عندما تكون $k = 1$ أي $E = 2mgl$ فإن ثقل النواس يصل إلى أعلى نقطة في الدائرة لكن في زمن غير منتهي ، و عندما تكون $k > 1$ أي $E > 2mgl$ فإن E ستكون كافية لجعل النواس في حالة دوران حول النقطة O).

من (1.3) نجد أن: $\dot{\theta}^2 = \dfrac{2E}{ml^2} + \dfrac{2\mathrm{g}}{l}\cos\theta$. أي:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}\left(\frac{E}{mgl} + \cos\theta\right) \qquad .... (1.4)$$

باعتبار أن $0 < \theta_{\max} < \pi$ هي سعة الإهتزاز نجد أن $-\theta_{\max} < \theta < \theta_{\max}$.

و في الموضع $\theta_{\max}$ تكون الطاقة الكلية E هي عبارة عن طاقة كامنة ، حيث أن الطاقة الحركية ستكون معدومة (حالة توقف لحظي) و منه فإن الطاقة الكلية E في الموضع $\theta_{\max}$ ستكون بالشكل: $E = -mgl\cos\theta_{\max}$ ، و منه فإن $\cos\theta_{\max} = -E/mgl$ ، و بالتعويض في (1.4) نجد أن: $\dot{\theta}^2 = (2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_{\max})$.

باعتبار أن $\theta_{\max} = \alpha$ لسهولة الترميز، و بدلالة أنصاف الزوايا نجد أن:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{l}\left(\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\theta/2)\right) \qquad .... (1.5)$$

بجذر طرفي (1.5) و أخذ الجذر الموجب نجد

$$2\sqrt{g/l}\,dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\sin^2(\alpha/2) - \sin^2(\theta/2)\right)}} \qquad .... (1.6)$$

و ذلك بفرض أن θ تتزايد مع t .

لنبدل في (1.6) المتحول θ بالمتحول الجديد τ و فقاً للعلاقة :

$$\sin(\theta/2) = \tau\sin(\alpha/2) \qquad .... (1.7)$$

فنجد أن:

$$2\sqrt{g/l}\,dt=\frac{2\sin(\alpha/2)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2\sin^2(\alpha/2)}\cdot\sqrt{\sin^2(\alpha/2)-\tau^2\sin^2(\alpha/2)}}$$

و منه :

$$\sqrt{g/l}\,dt=\frac{\sin(\alpha/2)\,d\tau}{\left|\sin(\alpha/2)\right|\sqrt{1-\tau^2\sin^2(\alpha/2)}\cdot\sqrt{1-\tau^2}}$$

لكن $\sin(\alpha/2)>0$ ، حيث $0<\alpha/2<\pi/2$ ، حيث أنه لدينا $0<\alpha<\pi$ و $0\le\theta<\pi$ و منه $0\le\tau\le1$ ($\tau=1$ عندما $\theta=\alpha$ ، $\tau=0$ عندما $\theta=0$) ، و مع ملاحظة أن $\theta=\tau=0$ عندما $t=0$ نجد أن:

$$\sqrt{g/l}\,t=\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\left(1-\tau^2\right)\left(1-k^2\tau^2\right)}} \qquad ....\ (1.8)$$

حيث أن $k^2=\sin^2(\alpha/2)$. و نلاحظ أن $0<k^2<1$.

و حتى لا نرتكب إساءة في الترميز نكتب (1.8) بالشكل:

$$(0<k<1, 0\le\tau\le1) \qquad \sqrt{g/l}\,t=\int_0^{\tau}\frac{d\eta}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)\left(1-k^2\eta^2\right)}} \qquad ....\ (1.9)$$

ندعو التكامل في (1.9) بالتكامل الناقصي النظامي من النوع الأول .

لنأخذ الدالة $x=f(\psi)=\int_0^{\psi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$ ، بحيث $-\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2}$ ، فنجد أنها دالة فردية

كما أن: $\frac{dx}{d\psi}=\frac{df}{d\psi}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$.

و بملاحظة أن $1-k^2\sin^2\psi\neq0$ ، نجد أن $df/d\psi$ موجود و $df/d\psi>0$ و منه فإن f دالة مستمرة و متزايدة معرفة على المجال $[-\pi/2,\pi/2]$ ، و مجموعة قيمها هي $[-K,K]$ حيث أن:

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\int_0^{1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad \text{و} \quad 0<k<1 .$$

و بالتالي فإن الدالة:

$$f:[-\pi/2,\pi/2]\to[-K,K]$$

$$\psi\mapsto x=f(\psi)=\int_0^{\psi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

تقابل ، تقابلها العكسي هو عبارة عن دالة بـ x مستمرة و متزايدة . حيث أن:

$$d\psi/dx=\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}>0$$

و التقابل العكسي لـ f نرمز له بالرمز $\psi=am\,x$ [1] ، و ندعو ψ سعة x .

باختيار التبديل $y=\sin\psi,\ t=\sin\phi$ (الدالة g المعرفة بـ $x=g(y)=f(\sin\psi)$ تقابل من $[-1,1]$ في $[-K,K]$) نجد أن:

$$x=\int_0^{\psi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\int_0^{y}\frac{dt}{\cos\phi\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\int_0^{y}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

---

[1] am هي إختصار لكلمة amplitude

و نعرف الدالة sn^{-1} (دالة العكس لدالة جاكوبي الناقصية) بالشكل:

$$x := sn^{-1}y = sn^{-1}(y,k) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\psi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

حيث أن $y = \sin\psi, \psi \in [-\pi/2, \pi/2], y \in [-1,1]$. و الدالة sn^{-1} تقابل من $[-1,1]$ في $[-K,K]$ ، تقابلها العكسي نرمز له بـ sn و سيكون : $sn : [-K,K] \to [-1,1]$ بحيث :

$$sn\,x = sn(x,k) = y = \sin\psi = \sin am\,x$$

تُدعى الدالة sn بدالة جاكوبي الناقصية .

كما عرّف جاكوبي دوالاً ناقصية أخرى بالشكل:

$$cn\,x = \cos am\,x := \cos\psi = \sqrt{1-sn^2x}$$

$$dn\,x = \Delta am\,x := \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} = \sqrt{1-k^2sn^2x} \qquad \text{............. (1.10)}$$

و بالتالي فإن: $sn^2x + cn^2x = 1$ ، و $dn^2x + k^2sn^2x = 1$.

أصبح بإمكاننا الآن حل المعادلة (1.1) و إيجاد θ كتابع للزمن t و ذلك بالعودة إلى (1.9) فنجد أن:

$\tau = sn\sqrt{g/l}\,t$ ، و من (1.7) نجد أن $\sin(\theta/2) = \sin(\alpha/2)\,sn\left(\sqrt{g/l}\,t\right)$. و بالتالي:

$$\boxed{\theta = 2\arcsin\left(k\ sn\sqrt{g/l}\,t\right)}$$

حيث أن : $0 < \sin(\alpha/2) = k < 1$.

و من هنا نجد أهمية دالة جاكوبي الناقصية sn ، إذ أنها مكنت من حل المعادلة التفاضلية (1.1) و إعطاء صيغة لـ θ(سعة الاهتزاز) بدلالة الزمن t في الحالة التي تكون فيها سعة الاهتزاز كبيرة بحيث لا نتكمن من كتابة $\sin\theta \approx \theta$.

(1.1.1) دور النواس البسيط :

حسب قانون مصونية الطاقة نجد أن: $T(\theta) + V(\theta) = T(\theta_{max}) + V(\theta_{max})$

حيث أن $T(\theta)$ تشير إلى الطاقة الحركية في الموضع θ .

و $V(\theta)$ تشير إلى الطاقة الكامنة في الموضع θ .

و منه فإن:

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl\cos\theta = -mgl\cos\theta_{max}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{d\theta} = \sqrt{l/2g}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_{max})}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{l/2g}\cdot\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta-\cos\theta_{max})}}$$

و بالتالي فإن الدور T سيكون بالشكل: $T = 4\sqrt{l/2g}\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{max}}}$

و لسهولة الترميز هنا أيضاً نعتبر أن $\theta_{max} = \alpha$. فيكون: $T = \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{l/g}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$.

لنأخذ التكامل $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$.

وباستخدام العلاقة $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ ، أي $\sin(\theta/2) = \sqrt{(1-\cos\theta)/2}$. نجد أن:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sin(\alpha/2)\cdot\sqrt{1-\frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin^2(\alpha/2)}}} \qquad .... \ (1.11)$$

لنضع في (1.11):

$$\sin(\theta/2)=\sin(\alpha/2)\cdot\sin\phi \qquad .... \ (1.12)$$

فنجد أن:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin(\alpha/2)\cos\phi\, d\phi}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha/2)\sin^2\phi}\cdot\sin(\alpha/2)\cdot\sqrt{1-\frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin^2(\alpha/2)}}}$$

لكن من (1.12) نجد $\sqrt{1-\frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin^2(\alpha/2)}}=\sqrt{1-\sin^2\phi}=\cos\phi$ ، و باعتبار أن $\sin(\alpha/2)=k$

$(0<k<1)$ ، نجد أن: $I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=K(k)$

و بالتالي فإن: $T=4\sqrt{l/g}\,K\left(\sin(\alpha/2)\right)$. حيث أن $0<\alpha=\theta_{\max}<\pi$ (سعة الإهتزاز) .

(1.2) التكاملات الناقصية:

سندرس هذه التكاملات بالتفصيل في فصل خاص بها ، لكن سنذكر هنا تعريفها و أشكالها النظامية .

(1.2.1) تعريف:

التكاملات الناقصية هي التكاملات التي لها الشكل $\int R\left[x,\sqrt{P(x)}\right]dx$ حيث أن $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو الرابعة ، و المعادلة $P(x)=0$ ليس لها جذور مضاعفة ، و R دالة كسرية بـ x و $\sqrt{P(x)}$ ، و بحيث لا نتمكن من التعبير عن هذه التكاملات بدلالة الدوال الإبتدائية.

(1.2.2) الأشكال النظامية للتكاملات الناقصية:

يوجد للتكاملات الناقصية ثلاثة أشكال نظامية

- التكامل الناقصي النظامي من النوع الأول:

$$\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad ;0<k<1,0<y\le 1$$

- التكامل الناقصي النظامي من النوع الثاني:

$$\int_0^y\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt \quad ;\ 0<k<1,0<y\le 1$$

- التكامل الناقصي النظامي من النوع الثالث:

$$\int_0^y\frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \ ;0<k<1,0<y\le 1$$

حيث أن النوع الأول و الثاني يحوي وسيطاً واحداً k $0<k<1$ () يدعى بالمقاس modulus ، ويدعى $k'=\sqrt{1-k^2}$ بالمقاس المتمم (complementary modulus).

أما النوع الثالث فيحوي وسيطين k و n و يمكن لـ n أن يكون عدداً عقدياً .

و باختيار التبديل $t=\sin\theta$ و $y=\sin\phi$ فإن التكاملات الثلاث السابقة تأخذ الأشكال التالية:

$$F(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad ;(0<k<1)$$

$$E(\phi,k)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \qquad ;(0<k<1)$$

$$\Pi(\phi,k,n)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad ;(0<k<1)$$

نسمي ϕ أو y بسعة (amplitude) التكاملات الناقصية النظامية .
و بأخذ $\phi=\pi/2$ أي $y=1$ فإننا ندعو التكاملات الناتجة بالتكاملات الناقصية النظامية التامة .

(1.2.3) ملاحظة:

يمكن أن تكون سعة التكاملات الناقصية ϕ أو y أعداداً حقيقية أو عقدية ، لكن عادة ما تؤخذ بالشكل $0<y\leq 1$ $0<\phi\leq\pi/2$. و كذلك المقاس k يمكن أن يكون عدداً حقيقياً أو عقدياً ، لكن في الدراسات التطبيقية في الهندسة و الفيزياء غالباً ما تُؤخذ $0<k<1$.

(1.3) الخصائص الدورية للدوال dn , cn , sn:

(1.3.1) مبرهنة :
لتكن $0<k<1$. عندئذ فإن الدوال sn, cn, dn المعرّفة في (1.10) هي دوال دورية . دور sn و cn هو $4K$ ، و الدالة dn أصغر دور لها مساو لـ $2K$.

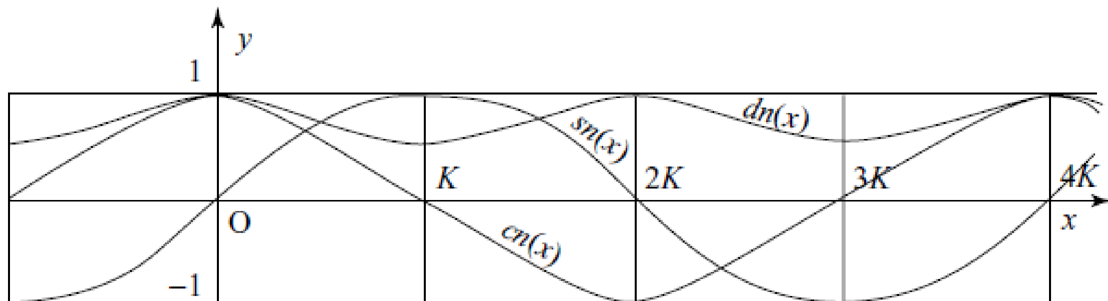
(1.4) ملاحظة:
ينتج لدينا من تعريف الدوال sn, cn, dn في (1.10) ، أي:

$$sn\,x=sn(x,k)=\sin am\,x=\sin\psi$$
$$cn\,x=cn(x,k)=\cos am\,x=\cos\psi$$
$$dn\,x=dn(x,k)=\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}=\sqrt{1-k^2sn^2x}$$

حيث $x=\int_0^{\psi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$. أن:

$$cn(0)=1, sn(0)=0, dn(0)=1$$
$$cn(K)=\cos(am\,K)=\cos(\pi/2)=0, sn(K)=1, dn(K)=\sqrt{1-k^2}=k'$$

و الشكل (1.2) يوضح منحنيات الدوال sn, cn, dn من أجل $k^2=0.7$.



الشكل (1.2)

(1.5) مشتقات الدوال $sn\,, cn\,, dn$:

نعلم أنه إذا كان: $x=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ حيث $0<k<1\,,\, -1\le y\le 1$.

فإن $y=sn\,x$ ، و بالتالي فإن:

$$sn'(x)=\frac{d}{dx}(sn\,x)=\frac{dy}{dx}=\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$
$$=\sqrt{(1-sn^2x)(1-k^2sn^2x)}=cn\,x\,.dn\,x$$
$$cn'(x)=\frac{d}{dx}(1-sn^2x)^{1/2}=-sn\,x\,.dn\,x$$
$$dn'(x)=\frac{d}{dx}(1-k^2sn^2x)^{1/2}=-k^2sn\,x\,.cn\,x$$

و بالتالي فإن الدوال $sn\,, cn\,, dn$ تنتمي إلى الصف $C^{\infty}(-\infty,\infty)$.

و باستخدام علاقات المشتق السابقة و العلاقتين $cn^2+sn^2=1, dn^2+k^2sn^2=1$.

نجد أن الدوال $dn\,x\,, cn\,x\,, sn\,x$ تحقق على الترتيب المعادلات التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(1+k^2)y+2k^2y^3$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-(1-2k^2)y-2k^2y^3$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=(2-k^2)y-2y^3$$

(1.6) ملاحظة:

إن الدالتين $dn\,, cn$ زوجيتين ، بينما الدالة sn فردية .

في الحقيقة لدينا $x=\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ ، حيث $0<k<1\,,\, -1\le y\le 1$. و منه $y=sn\,x$.

لنفرض أن $t=-\tau$ ، فيكون $x=-\int_0^{-y} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}$ ، أو $-x=\int_0^{-y} \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}$

أي أن: $sn(-x)=-y=-sn\,x$ و منه sn دالة فردية ، و كذلك:

$$cn(-x)=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2(-x)}=\sqrt{1-sn^2x}=cn\,x$$
$$dn(-x)=\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(-x)}=dn\,x$$

"الفصل الثاني"

الخصائص العامة للدوال الناقصية

General properties of elliptic functions

في هذا الفصل تم الاعتماد على المراجع التالية: 44, 40, 39, 25, 20, 18, 12, 11, 6, 5, 3, 2

(2.1) الدوال الميرومورفية الدورية: periodic meromorphic functions

(2.1.1) تعريف:

نقول عن الدالة العقدية $f(z)$ إنها دورية دورها $w \in \mathbb{C}$ ، إذا و فقط إذا كان $f(z+w)=f(z)$ من أجل كل z و $z+w$ تنتمي إلى مجموعة تعريف f .

فإذا كانت f ميرومورفية في $\mathbb{C}$ ، مجموعة أقطابها P . فإن w يكون دوراً للدالة f إذا وفقط إذا كان $f(z+w)=f(z)$ من أجل كل $z, z+w \in \mathbb{C} \backslash P$.

ملاحظة:

في هذا الفصل سنعتبر أن الدالة الميرومورفية ستكون ميرومورفية في $\mathbb{C}$ ما لم يُذكر خلاف ذلك .

كما أنه إذا كان w دوراً لـ $f(z)$ فإن $(-w)$ سيكون دوراً لـ $f(z)$

و كذلك إذا كانت $w_1,...,w_n$ أدواراً لـ $f(z)$ ، فإن $m_1w_1+...+m_nw_n$ دوراً لـ f مهما تكن m_j $(1\le j\le n)$ من $\mathbb{Z}$. و منه فإن مجموعة أدوار الدالة العقدية $f(z)$ هي زمرة جمعية تبديلية جزئية من الزمرة $(\mathbb{C},+)$ ، و بالتالي فهي مودول (module) فوق $\mathbb{Z}$ ، ندعوها مودول الدور أو شبكة الدور (period lattice) للدالة f .

(2.1.2) مبرهنة:

لتكن $f(z)$ دالة ميرومورفية دورية غير ثابتة ، و لتكن E مجموعة أدوار f . عندئذ فإن E متقطعة[1].

الإثبات:

لنفرض أنه يوجد في $\mathbb{C}$ نقطة تجمع لـ E و لتكن $w_0 \in E$ ، ومنه حسب (0.1.2) يمكننا أن نوجد متتالية $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ من E بحيث $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} w_0$ ، و $\forall n\ge 1; w_n \ne w_0$. و بما أن $w_0, w_n \in E$ فإن $f(w_0)=f(0)=f(w_n)$.

إذا كان[2] $f(0)=\infty$ ، عندئذ فإن لـ f متتالية من الأقطاب $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى w_0 ، و منه فإن w_0 نقطة تجمع للمتتالية $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ و هذا يناقض كون f ميرومورفية (أقطابها نقاط معزولة).

---

[1] بعض المراجع تعرف المجموعة المتقطعة بأنها المجموعة التي تكون جميع نقاطها معزولة .

[2] إذا كانت z_0 قطباً للدالة f فإننا سنكتب $f(z_0)=\infty$.

و إذا كان $f(0)\neq\infty$ ، فإن الدالة الميرومورفية $g(z)=f(z)-f(0)$ لها متتالية متقاربة من الأصفار و هي $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ و بالتالي فإن g ستكون مطابقة للصفر [1] ، و بالتالي فإن f ستكون ثابتة و هذا يتناقض مع الفرض و بالتالي فإنه ليس لـ f أي نقطة تجمع في $\mathbb{C}$ ، وهذا يعني أن E متقطعة . □

(2.1.3) مبرهنة:

لتكن $f(z)$ دالة ميرومورفية دورية غير ثابتة دورها $0\neq w_1'\in\mathbb{C}$. عندئذ المستقيم L المار من المبدأ 0 و w_1' ، يحوي دور $0\neq w_1$ لـ $f(z)$ ، و كل دور لـ $f(z)$ سيقع على L و له الشكل mw_1 حيث أن $m\in\mathbb{Z}$.

الإثبات:

بما أن مجموعة أدوار الدالة الميرومورفية الدورية غير الثابتة متقطعة (المبرهنة 2.1.2)، فإن القطعة المستقيمة l' الواصلة بين 0 و w_1' تحوي فقط عدداً منتهٍ من أدوار الدالة f .

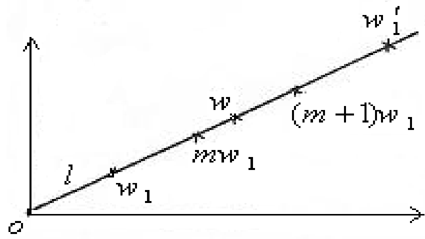
ليكن $0\neq w_1$ أحد هذه الأدوار و الأقرب إلى المبدأ 0 . (يُمكن لـ w_1 أن يكون منطبقاً على w_1').

عندئذ فإن القطعة المستقيمة l الواصلة بين 0 و w_1 لا تحوي أي دور للدالة $f(z)$ غير 0 و w_1 .

لنفرض أن w دور لـ $f(z)$ بحيث $w\in L$ و ليس من الشكل mw_1 $(m\in\mathbb{Z})$. عندئذ فإن w ستقع بين النقطتين mw_1 و $(m+1)w_1$. الشكل (2.1) .

و منه فإن : $0<|w-mw_1|<|w_1|$

و بالتالي فإن $w-mw_1$ دور لـ $f(z)$ ينتمي إلى l مختلف عن الصفر و w_1 و هذا تناقض مع بناء القطعة المستقيمة l . و بالتالي فإن كل دور $w\in L$ لـ f سيكون من الشكل mw_1 حيث $m\in\mathbb{Z}$.



الشكل (2.1)

(2.1.4) تعريف:

لتكن $f(z)$ دالة دورية دورها $0\neq w_1$ ، نقول عن f إنها دورية بشكل بسيط (simply periodic) إذا كانت كل أدوارها من الشكل mw_1 حيث $m\in\mathbb{Z}$.

العدد w_1 يُدعى الدور الإبتدائي (primitive period) للدالة f .

(2.1.5) تعريف:

نقول عن الأعداد العقدية $w_1,\dots,w_n$ إنها مستقلة خطياً فوق $\mathbb{R}$ ، إذا تحقق أنه مهما كانت $a_1,\dots,a_n$ أعداداً حقيقية بحيث $a_1w_1+\dots+a_nw_n=0$ ، فإن $a_1=\dots=a_n=0$.

إذا كان أحد الأعداد $a_j\,(1\leq j\leq n)$ لا يساوي الصفر فإننا نقول عن الأعداد $w_1,\dots,w_n$ إنها مرتبطة خطياً .

و إذا كان لدينا w_1,w_2 عددان عقديان فإن الكتابة $w_2/w_1\notin\mathbb{R}$ تعني أن w_1,w_2 مستقلان خطياً فوق $\mathbb{R}$ ، أي أن النقاط $0,w_1,w_2$ ليست على إستقامة واحدة .

(2.1.6) مبرهنة:

لتكن $f(z)$ دالة ميرومورفية دورية غير ثابتة ، و لتكن $0\neq w_1', 0\neq w_2'$ أدواراً للدالة f بحيث $w_2'/w_1'\notin\mathbb{R}$. عندئذ فإن $f(z)$ تملك الدورين $0\neq w_1, 0\neq w_2$ ، و كل دور لـ f له الشكل mw_1+nw_2 حيث أن $m,n\in\mathbb{Z}$

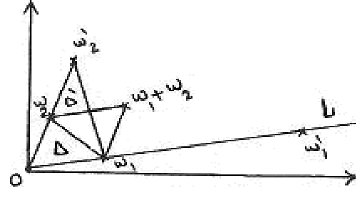
الإثبات:

بما أن $0\neq w_1'$ دور لـ f فإنه حسب المبرهنة (2.1.3) المستقيم L المار من المبدأ 0 و w_1' يحوي دور $0\neq w_1$ لـ f و $w_1'=mw_1$ $(m\in\mathbb{Z})$. و بما أن $w_2'/w_1'\notin\mathbb{R}$ فإن $0,w_1',w_2'$ مستقلة خطياً و منه فإن w_2' لا تقع على L .

---

[1] حسب المبرهنة التي تنص على أنه إذا كانت f دالة تحليلية على منطقة ما Ω ، و أصفارها هي المتتالية غير المنتهية $\{z_n\}$ و $z_n\to z^*\in\Omega$ عندئذ فإن f مطابقة للصفر في Ω .

لتكن Δ' مجموعة مغلقة محيطها مثلث رؤوسه عند النقاط $0,w_1,w_2'$. الشكل (2.2) .
و لتكن E مجموعة أدوار الدالة f الموجودة في Δ' و المختلفة عن 0 و w_1 . بما أن مجموعة أدوار الدالة الميرومورفية f متقطعة
و Δ' مجموعة محدودة
فإن E مجموعة منتهية و لا يوجد فيها نقاط واقعة على القطعة المستقيمة الواصلة بين 0 و w_1 .
لتكن w_2 نقطة من E و الأقرب إلى المستقيم L ، (w_2 يمكن أن تكون منطبقة على w_2') .

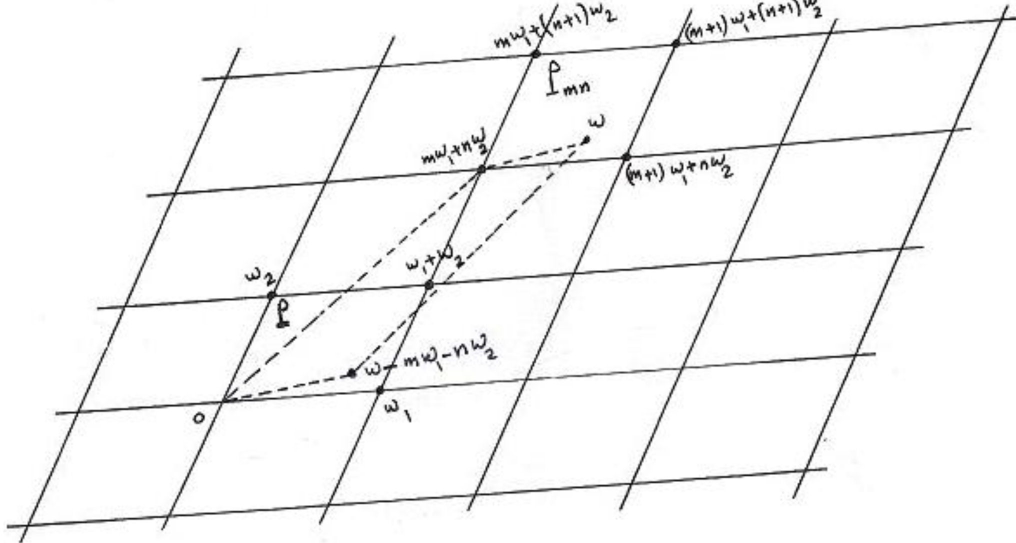


الشكل (2.2)

عندئذ فإن المجموعة المغلقة Δ و التي محيطها مثلث رؤوسه عند النقاط $0,w_1,w_2$ ، (Δ يمكن أن تكون منطبقة على Δ' ، و يحصل هذا عندما تنطبق w_2 على w_2') ، لا تحوي أي دور آخر لـ f غير الرؤوس $0,w_1,w_2$ ، و متوازي الأضلاع P الذي رؤوسه عند النقاط $0,w_1,w_1+w_2,w_2$ أيضاً لا يحوي أي دور آخر لـ $f(z)$ غير رؤوسه ، لأنه إذا فرضنا أن w دور لـ $f(z)$ مختلف عن $0,w_1,w_1+w_2,w_2$ و يقع في P عندئذ فإن $w^*=w_1+w_2-w$ ستكون دوراً لـ $f(z)$ بحيث $w^*\in P$. ومنه إما أن يكون w أو w^* منتمية إلى Δ ، و هذا يتناقض مع بناء Δ .
ليكن الآن $m,n\in\mathbb{Z}$ ، و P_{mn} متوازي أضلاع رؤوسه عند النقاط :

$$mw_1+nw_2\,,(m+1)w_1+nw_2\,,(m+1)w_1+(n+1)w_2\,,mw_1+(n+1)w_2$$

عندها فإن الجماعة $\{P_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ستشكل شبكة متوازيات أضلاع في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ رؤوسها هي كل النقاط التي لها الشكل mw_1+nw_2 . (الشكل 2.3) .



الشكل (2.3)

لنفرض أن w دور لـ $f(z)$ ليس من الشكل mw_1+nw_2 عندئذ فإن النقطة w ستقع في أحد متوازيات الأضلاع P_{mn} و مختلفة عن رؤوس P_{mn} . و منه فإن $w-mw_1-nw_2$ دور لـ $f(z)$ موجود في متوازي الأضلاع P و مختلف عن رؤوس P . و هذا يتناقض مع بناء متوازي الأضلاع P . و هذا يدل على أن كل دور للدالة f سيكون من الشكل mw_1+nw_2 ، أي أنه أحد رؤوس متوازيات الأضلاع P_{mn} $(m,n\in\mathbb{Z})$. □

(2.1.7) تعريف:
نقول عن الدالة الدورية $f(z)$ إنها مزدوجة الدورية (doubly periodic) إذا كان كل دور من أدوارها من الشكل mw_1+nw_2 ، أي $f(z+mw_1+nw_2)=f(z)$ ، حيث أن m,n أعداداً صحيحة و w_1,w_2 أعداداً عقدية بحيث $(w_2/w_1)\notin\mathbb{R}$.

(2.1.8) ملاحظة:

إن الفرض $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$ في التعريف (2.1.7) هام جداً . لأنه لو كان $w_2/w_1 \in \mathbb{R}$ ، بحيث $w_2/w_1 = a/b$ حيث أن a, b عددان صحيحان أوليان نسبياً فيما بينهما (أي يوجد $m, n \in \mathbb{Z}$ ، بحيث $ma + nb = 1$).

فإن f ستصبح دالة دورية بشكل بسيط .

لأنه إذا كان $w = mw_1 + nw_2$ عندئذ فإن w دور لـ f و يكون لدينا:

$$w = w_1\left(m + n\frac{w_2}{w_1}\right) = w_1\left(m + n\frac{b}{a}\right) = \left(\frac{w_1}{a}\right)(ma + nb) = \frac{w_1}{a}$$

و بالتالي فإن $w_1 = aw$. كما أن :

$$w = w_2\left(m\frac{w_1}{w_2} + n\right) = w_2\left(m\frac{a}{b} + n\right) = \left(\frac{w_2}{b}\right)(ma + nb) = \frac{w_2}{a}$$

و منه $w_2 = aw$. و بالتالي فإن f دورية بشكل بسيط .

و إذا كانت النسبة $w_2/w_1 \in \mathbb{R}$ و w_2/w_1 عدد غير كسري فإن الدالة f ستكون ثابتة.

لأنه في هذه الحالة f ستملك أدواراً صغيرة بالقدر الذي نريد[1] ، و هذا يعني أنه مهما كان $\varepsilon > 0$ فإنه يوجد w دور للدالة f بحيث $0 < |w| < \varepsilon$ ، و الدالة التي تمتلك أدواراً صغيرة بالقدر الذي نريد ستكون ثابتةً في أي منطقة تكون الدالة تحليلية عليها . و ذلك لأنه عند كل نقطة تكون الدالة تحليلية عندها يكون لدينا:

$$f'(z) = \lim_{z_n \to 0} \frac{f(z + z_n) - f(z)}{z_n}$$

حيث أن $\{z_n\}$ هي أي متتالية من الأعداد العقدية غير الصفرية و متقاربة إلى الصفر .

و بما أن f تمتلك أدواراً صغيرة بالقدر الذي نريد فإنه يمكننا أن نأخذ المتتالية $\{z_n\}$ كمتتالية من الأدوار لـ f تسعى إلى الصفر . و بذلك يكون لدينا $f(z + z_n) = f(z)$ ، ومنه فإن $f'(z) = 0$ عند كل نقطة تكون الدالة f تحليلية عندها .و بالتالي فإن f يجب أن تكون ثابتة في أي منطقة تكون تحليلية عليها.

مما سبق نجد أنه إذا كان $(w_2/w_1) \in \mathbb{R}$ فإن الدالة f إما أن تكون ثابتة أو أن تكون دورية بشكل بسيط.

(2.1.9) تعاريف أساسية:

في التعريف (2.1.7) إذا أخذنا $n = 1, m = 0$ ، و مرة أخرى بأخذ $n = 0, m = 1$ ، نجد أن:

$$f(z + w_1) = f(z + w_2) = f(z)$$

ندعو المجموعة: $\Lambda = \{w = mw_1 + nw_2 ; m, n \in \mathbb{Z}; w_2/w_1 \notin \mathbb{R}\}$ ، و التي تحوي كل أدوار الدالة f ، بشبكة الدور للدالة f و المولّدة بـ w_1 و w_2.

⊛ و ندعو w_2, w_1 بزوج الدور الإبتدائي (a pair of primitive periods) للدالة f ، و هو الزوج الذي يولد شبكة الدور Λ .

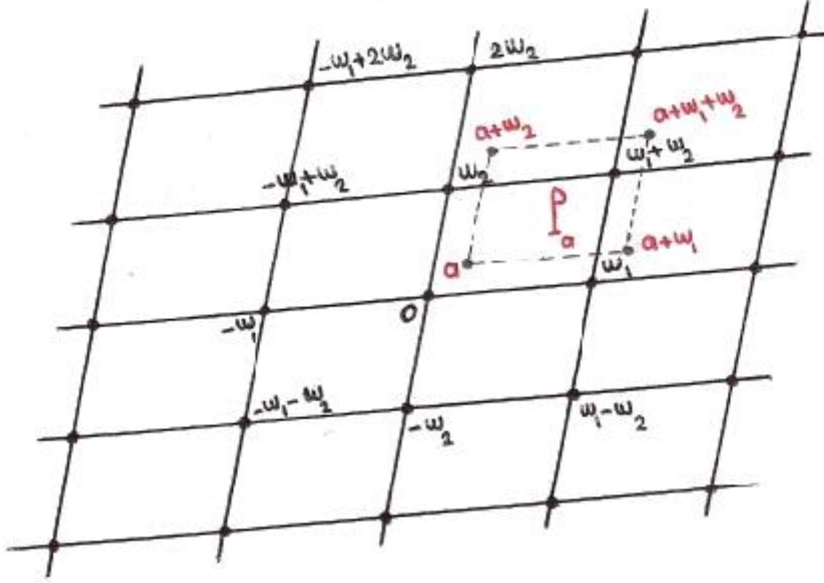
و سنختار إصطلاحاً زوج الدور الإبتدائي w_2, w_1 بحيث $\mathrm{Im}(w_2/w_1) > 0$.

و نلاحظ أنه عندما يكون لدينا دالة مزدوجة الدورية f فإننا سنحصل على شبكة من متوازيات الأضلاع تغطي المستوي العقدي $\mathbb{C}$ ، و رؤوس متوازيات الأضلاع هذه هي نقاط الشبكة Λ ، الشكل (2.4).

⊛ نسمي متوازي الأضلاع الذي رؤوسه عند النقاط $0, w_1, w_1 + w_2, w_2$ مع المنطقة التي يحيط بها ، بمتوازي أضلاع الدور الإبتدائي(primitive period parallelogram).

---

[1] و ذلك حسب المبرهنة التي تنص على أنه إذا كانت w_2, w_1 أدواراً للدالة f بحيث تكون النسبة w_2/w_1 عدد حقيقي غير كسري . عندئذ فإن f تملك أدواراً صغيرة بالقدر الذي نريد .



الشكل (2.4)

⊛ ليكن لدينا الشبكة $\Lambda=\{w=mw_1+nw_2;m,n\in\mathbb{Z};w_2/w_1\notin\mathbb{R}\}$ ، و ليكن $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

نقول عن z_1,z_2 إنهما متطابقان (congurent) بالمقاس Λ و نكتب $z_1\equiv z_2(\bmod\Lambda)$

أو $z_1\equiv z_2(\bmod w_1,w_2)$ ، إذا وفقط إذا كان $z_1-z_2\in\Lambda$ ، أي $z_1=z_2+mw_1+nw_2$.

و العلاقة $z\equiv w\ (\bmod\Lambda)$ و التي تدعى التطابق بالمقاس Λ هي علاقة تكافؤ، نرمز لمجموعة صفوف تكافؤ هذه العلاقة بـ $\mathbb{C}/\Lambda$.

⊛ إذا كان لدينا دالة مزدوجة الدورية f ، شبكة الدور لها هي Λ . فإننا نُعرف المنطقة الأساسية لـ f ، بأنها المجموعة الجزئية المترابطة $D\subseteq\mathbb{C}$ بحيث يتحقق أنه

من أجل أي عدد عقدي z ، يوجد عنصر وحيد $w\in D$

بحيث $z-w\in\Lambda$ (أي $z\equiv w\ (\bmod\Lambda)$) .

و المنطقة الأساسية يمكن إختيارها بالشكل:

$$D=\{z;z=z_0+sw_1+tw_2;0\le s,t<1\}$$

حيث أن z_0 نقطة مثبتة.

z_0+w_2
$z_0+w_1+w_2$
z_0+tw_2
z
z_0
z_0+sw_1
z_0+w_1

و ندعو المجموعة:

$$P=\{z;z=z_0+sw_1+tw_2;0\le s,t<1\}$$

بمتوازي أضلاع الدور الأساسي (fundamental period parallelogram) .

و في حالة خاصة إذا كانت $z_0=0$ ، فإن متوازي أضلاع الدور الأساسي سيكون هو نفسه متوازي أضلاع الدور الإبتدائي ، لكن باستثناء الرؤوس w_1,w_1+w_2,w_2 و كذلك الضلعين $[w_1,w_1+w_2],[w_1+w_2,w_2]$.

و ندعو كل متوازي أضلاع نحصل عليه بانسحاب (دون دوران) لمتوازي أضلاع الدور الأساسي بمتوازي أضلاع الدور (period parallelogram) أو إختصاراً ندعوه عين (mesh) ، و هو عبارة عن مجموعة النقاط التالية:

$$\{z;z=z_0+(m+\zeta)w_1+(n+\eta)w_2;m,n\in\mathbb{Z},0\le\zeta,\eta<1\}$$

حيث أن z_0 نقطة مثبتة.

و نلاحظ أن الدالة المزدوجة الدورية f تأخذ قيماً متساوية عند النقاط المتطابقة.

لأنه إذا كان $z_1\equiv z_2(\bmod\Lambda)$ فإن $z_1=z_2+mw_1+nw_2$

و منه فإن $f(z_1)=f(z_2+mw_1+nw_2)=f(z_2)$. و بالتالي فإنه يكفي دراسة سلوك الدالة الناقصية في عين واحدة من عيون الشبكة Λ .

(2.1.10) ملاحظة :
نلاحظ من المبرهنتين (2.1.3) و (2.1.6) أنه إذا كان لدينا f دالة ميرومورفية دورية غير ثابتة و Λ شبكة الدور لـ f . عندئذ فإن Λ تأخذ أحد الأشكال التالية:
(1) $\Lambda = \{0\}$.
(2) $\Lambda = \{mw\,;m \in \mathbb{Z};\, w \neq 0\}$. (f ستكون دورية بشكل بسيط) .
(3) $\Lambda = \{mw_1 + nw_2\,; m,n \in \mathbb{Z}; w_1, w_2 \neq 0;\; w_2/w_1 \notin \mathbb{R}\}$. (f ستكون مزدوجة الدورية).

(2.1.11) مبرهنة :
لتكن f دالة مزدوجة الدورية زوج الدور الإبتدائي لها w_1, w_2 ، و ليكن w_1', w_2' دورين لـ f بحيث :
$$w_1' = aw_1 + bw_2\ ,\ w_2' = cw_1 + dw_2$$
حيث أن $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ و $ad - bc = \pm 1$. عندئذ فإن w_1', w_2' ستكون أدواراً إبتدائية لـ f .

نلاحظ من هذه المبرهنة أنه يوجد للدالة المزدوجة الدورية f عدد غير منته من أزواج الأدوار الإبتدائية تولد شبكة الدور نفسها، لأنه يوجد عدد غير منته من الأعداد الصحيحة a,b,c,d تحقق $ad - bc = \mp 1$. و بالتالي فإنه يوجد لـ f عدداً غير منته من متوازيات أضلاع الدور الإبتدائية .

(2.2) التحويلات المعيارية: Modular Transformation

لنفترض أنه لدينا الحالة (3) من الملاحظة (2.1.10) ، و بالتالي فإن أي دور w للدالة مزدوجة الدورية f سيكون بالشكل $w = mw_1 + nw_2$ حيث $m,n \in \mathbb{Z}$ و w_1, w_2 زوج الدور الإبتدائي و $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$. ندعو كل زوج مرتب (w_1', w_2') يحقق أن كل دور w لـ f له تمثيل وحيد بالشكل : $w = n_1 w_1' + n_2 w_2'$ حيث أن $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ ، بأساس الشبكة Λ ، (Λ هي شبكة الدور للدالة f) .
و إذا كان $(w_1, w_2), (w_1', w_2')$ أساسين للشبكة Λ فإن العلاقة بين هذين الأساسين تتوضح في المبرهنة التالية.

(2.2.1) مبرهنة:
لتكن f دالة مزدوجة الدورية ، شبكة الدور لها Λ ، و ليكن (w_1, w_2) أساس للشبكة Λ بحيث $\operatorname{Im}(w_2/w_1) > 0$
عندئذ أي أساس آخر (w_1', w_2') لـ Λ له التمثيل:
$$\begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$$
حيث أن $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ، و $ad - bc = 1$

⊛ نرمز بـ $SL(2,\mathbb{Z})$ أو بـ Γ ، لمجموعة المصفوفات المربعة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ حيث $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ و $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$
أي: $SL(2,\mathbb{Z}) = \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{Z}; ad - bc = 1 \right\}$
و ندعو كل مصفوفة من $SL(2,\mathbb{Z})$ بالمصفوفة المعيارية (modular matrix)
و ندعو المعادلة $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ حيث $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ بالتحويل المعياري (modular transformation)
و نقول عن الأساسين (w_1, w_2) ، (w_1', w_2') بحيث :
$$\begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$
إنهما متكافئين . و هذا يعني أنهما يولدان نفس شبكة الدور Λ .

و من هنا نلاحظ أن $\tau' = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ حيث أن $\tau' = \dfrac{w'_2}{w'_1}$ و $\tau = \dfrac{w_2}{w_1}$

و منه $\operatorname{Im}(\tau') > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\tau) > 0$ أي $\tau' \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \tau \in \mathcal{H}$ ، حيث $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

كما أن مجموعة المصفوفات $SL(2,\mathbb{Z})$ (مجموعة كل التحويلات المعيارية) تشكل زمرة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات(بالنسبة لعملية التركيب) ، تدعى بالزمرة المعيارية (modular group).

[حيث أنه يمكننا أن نرفق كل تحويل من الشكل $f(\tau) = \tau' = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ بمصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ، $A \in SL(2,\mathbb{Z})$

فإذا كان A, B مصفوفتين مرافقتين للتحويلين f, g على الترتيب ، عندئذ فإن الجداء AB مرافق للتركيب $f \circ g$

و المصفوفة الواحدية $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ تكون مرافقة للتحويل $f(\tau) = \tau$.

و المصفوفة $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ تكون مرافقة لمقلوب التحويل f أي $f^{-1}(\tau) = \dfrac{d\tau - b}{-c\tau + a}$.

و بذلك فإنه يمكننا اعتبار أنه لا يوجد تمييز بين التحويل المعياري و المصفوفة المرافقة له ، فإذا كانت

$\in SL(2,\mathbb{Z})) \; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ فإننا نكتب $A\tau = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$]

سنورد الآن بعض المبرهنات و النتائج و الملاحظات المتعلقة بالزمرة $SL(2,\mathbb{Z})$ و التي ستفيدنا بشكل كبير في نظرية التحويلات الواردة في الفصل الخامس.

(2.2.2) مبرهنة:

الزمرة المعيارية Γ مولدة بالمصفوفتين المعياريتين $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

أي أن كل مصفوفة $A \in \Gamma$ تُكتب على شكل جداء لـ T^n و S^m حيث أن $n \in \mathbb{Z}$ و $m = 0,1,2,\ldots$ ، أو

$$\forall A \in \Gamma ; A = T^{n_1} S T^{n_2} S \ldots S T^{n_k}$$

حيث أن $n_j \in \mathbb{Z} \; ; 1 \le j \le k$. وهذا التمثيل ليس وحيداً .

و المبرهنة (2.2.2) تبين أن الزمرة المعيارية Γ مولدة بالتحويلين المعياريين $S\tau = -1/\tau$, $T\tau = \tau + 1$.

المنطقة الأساسية للزمرة المعيارية Γ :

لتكن τ, τ' نقطتين من النصف العلوي للمستوي العقدي $\mathbb{C}$.

نقول عن النقطتين τ و τ' إنهما متكافئتين (أو متطابقتين) بالنسبة لـ Γ و نكتب $\tau \sim \tau'$ ، إذا كانت $\tau' = A\tau$ من أجل $A \in \Gamma$. و هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ ، و ستكون المجموعة $[\tau] = \{M\tau ; M \in \Gamma\}$ هي عبارة عن صف تكافؤ العنصر τ و الذي يدعى بالمدار (orbit) .

و $\mathcal{H}/\Gamma = \{[\tau] ; \tau \in \mathcal{H}\}$ هي مجموعة كل المدارات (مجموعة كل صفوف التكافؤ) .

و علاقة التكافؤ هذه سوف تقسم النصف العلوي من المستوي العقدي $\mathbb{C}$ إلى جماعة منفصلة من صفوف التكافؤ تدعى المدارات.

(2.2.3) تعريف:

نعرف المنطقة الأساسية للزمرة المعيارية Γ و نرمز لها بـ R_Γ ، بأنها المجموعة المفتوحة و الجزئية من $\mathcal{H}$ و التي تملك الخاصتين التاليتين:

(1) لا يوجد نقطتين مختلفتين من R_Γ متكافئتين بالنسبة لـ Γ .

(2) من أجل أي نقطة $\tau \in \mathcal{H}$ يوجد نقطة τ' من $\overline{R}_\Gamma$ (لصاقة R_Γ) بحيث $\tau \sim \tau'$ بالنسبة لـ Γ .

و بملاحظة أنه بأخذ w_1,w_2 كما في المبرهنة (2.1.6) نجد أنه إذا كان w_1',w_2' عددين عقديين بحيث $w_2'/w_1' \notin \mathbb{R}$ و $\Lambda = \{mw_1'+nw_2' ; m,n \in \mathbb{Z}\}$ ، عندئذ فإنه يوجد أساس (w_1,w_2) للشبكة Λ بحيث :

$$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2' \\ w_1' \end{pmatrix}$$

حيث أن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ، و $|w_1| \le |w_2|$ و $|w_2| \le |w_1 \pm w_2|$.

و بالتالي إذا كان $\tau' \in \mathcal{H}$ عندئذ فإنه يوجد $\tau \in \mathcal{H}$ مكافئ لـ τ' بالنسبة لـ Γ ، بحيث $|\tau| \ge 1$ و $|\tau \pm 1| \ge |\tau|$.

و بأخذ $\tau = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) ، فإذا كان $|\tau \pm 1| \ge |\tau|$ فإن $|\alpha + i\beta \pm 1|^2 \ge \alpha^2 + \beta^2$ أي $1 \pm \alpha \ge 0$

و بالتالي $|\mathrm{Re}\,\tau| \le 1/2$.

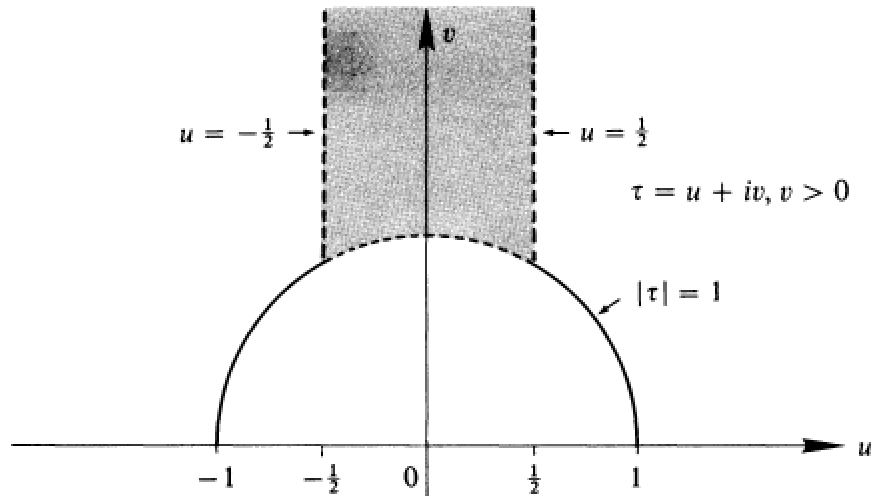
و بالعكس إذا كان $|\mathrm{Re}\,\tau| \le 1/2$ فإن $|\tau \pm 1| \ge |\tau|$

أي أن مجموعة النقاط $\tau \in \mathcal{H}$ التي تحقق $|\tau \pm 1| \ge |\tau|$ ، ستحقق أن $|\mathrm{Re}\,\tau| \le 1/2$ ، أي تحقق أن $|\tau + \bar{\tau}| \le 1/2$.

سنبرهن الآن على أن المنطقة الأساسية للزمرة المعيارية Γ هي عبارة عن مجموعة النقاط $\tau \in \mathcal{H}$ التي تحقق المتراجحتين $|\tau + \bar{\tau}| < 1$, $|\tau| > 1$. أي :

$$R_\Gamma = \{\tau \in \mathcal{H} ; |\tau| > 1 \, , \, |\tau + \bar{\tau}| < 1\} = \{\tau \in \mathcal{H} ; |\tau| > 1, |\mathrm{Re}\,\tau| < 1/2\}$$

و هذه المجموعة مفتوحة و مترابطة. مبينة بالشكل التالي:



(2.2.4) مبرهنة:

المجموعة المفتوحة $R_\Gamma = \{\tau \in \mathcal{H} ; |\tau| > 1 \, , \, |\tau + \bar{\tau}| < 1\}$ هي المنطقة الأساسية للزمرة Γ .

(2.3) الخصائص العامة للدوال الناقصية:

(2.3.1) تعريف:

الدالة الناقصية هي دالة ميرومورفية في $\mathbb{C}$ ، وحيدة القيمة ، مزدوجة الدورية .

⊛ إذا كانت a نقطة بحيث لا يوجد أي قطب للدالة الناقصية f على محيط متوازي الأضلاع الذي رؤوسه $a, a+w_1, a+w_1+w_2, a+w_2$ فإننا ندعو متوازي الأضلاع السابق مع المنطقة التي يحيط بها ، خلية (cell) ، و نرمز لها بـ P_a ، أنظر الشكل (2.4).

و يمكن أن نحصل على الخلية P_a بانسحاب (دون دوران) لمتوازي أضلاع الدور الأساسي الذي رؤوسه $0, w_1, w_1 + w_2, w_2$ ، أو بانسحاب دون دوران لأي عين من عيون الشبكة . حيث أنه ليس من المناسب في كثير من الأحيان دراسة خواص الدوال الناقصية مع وجود أقطاب أو أصفار في محيط أي عين من عيون الشبكة.
و عملية إجراء الإنسحاب ممكنة لأن أقطاب و أصفار الدالة الناقصية هي نقاط معزولة.
كما أنه يكفي دراسة سلوك الدالة الناقصية في خلية واحدة مثل P_a .
و ندعو مجموعة أقطاب (أو أصفار) الدالة الناقصية الموجودة في أي خلية بالمجموعة غير الخزولة (irreducible set) أو بالمجموعة الأساسية (fundamental set) ، و عدد عناصر هذه المجموعة منتهي كما سنرى .

ملاحظة (1):
إن الخلية P_a ، و كذلك متوازيات الأضلاع التي عرفناها في (2.1.9) لا نعني بها أضلاع متوازي الأضلاع فقط إنما نعني بها مجموعة النقاط التي محيطها متوازي الأضلاع . فعلى سبيل المثال نعني بمتوازي أضلاع الدور الأساسي المجموعة $\{z ; z = z_0 + sw_1 + tw_2 ; 0 \le s, t < 1\}$ و z_0 نقطة مثبتة.

ملاحظة (2):
إن مجموع و فرق و جداء و قسمة دالتين ميرومورفيتين هو دالة ميرومورفية ، و كذلك مشتق الدالة الميرومورفية هو دالة ميرومورفية ، كما أنه إذا كان f و g دالتين كل منهما مزدوجة الدورية زوج الدور الإبتدائي لهما w_1, w_2 فإن الدوال $f \pm g \ , \ f \ g \ , \ f / g$ ستكون مزدوجة الدورية.
و إذا كان $f(z + mw_1 + nw_2) = f(z)$ حيث أن $m, n \in \mathbb{Z}$ و $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$ و مهما يكن $z \in \mathbb{C} \setminus S$ حيث أن S هي مجموعة أقطاب f . فإن:

$$f'(z + mw_1 + nw_2) = f'(z) \ ; \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus S$$

و بالتالي فإنه إذا كان لدينا $f \ , \ g$ دالتين ناقصيتين و w_1, w_2 أدوارًا إبتدائية لهما فإن الدوال $f/g \ , \ f \ g \ , \ f \pm g \ , \ f'$ (بشرط $g \neq 0$)، ستكون دوالاً ناقصية زوج الدور الإبتدائي لكل واحدة منها هو w_1, w_2

(2.3.2) مبرهنة: تعود هذه المبرهنة للعالم ليوفيل و قد أثبتها عام 1847
الدالة الناقصية الصحيحة (entire elliptic function) هي دالة ثابتة.
الإثبات:
إن الدالة f محدودة في أي خلية P_a من المستوي $\mathbb{C}$. و ذلك لأن $\bar{P_a}$ (لصاقة P_a) هي مجموعة مغلقة و محدودة و بالتالي فهي متراصة ومنه فإن $f(\bar{P_a})$ متراصة (لأن f مستمرة[1]) فهي محدودة و بالتالي فإن f محدودة في $\bar{P_a}$ و بما أن $P_a \subseteq \bar{P_a}$ فإن f محدودة في P_a . و بما أن f مزدوجة الدورية فإن لها نفس القيم في كل متوازي أضلاع من متوازيات أضلاع الدور . و بالتالي فإن f دالة محدودة على كامل المستوي $\mathbb{C}$ ، و منه فإنه حسب مبرهنة ليوفيل (أنظر 0.1.4) نجد أن f ثابتة . □

ملاحظة:
من المبرهنة (2.3.2) نجد أن الدالة الناقصية غير الثابتة يجب أن تمتلك قطب واحد على الأقل في كل عين من عيون شبكة الدور.

(2.3.3) مبرهنة:
ليكن $f \ , g$ دالتين ناقصيتين لهما نفس شبكة الدور Λ و أقطابهما من نفس المراتب عند نفس النقاط في $\mathbb{C}$.
عندئذ فإن $f(z) = g(z) + c$ حيث أن $c \neq 0$ ثابت .

---
[1] إذا كانت f دالة مستمرة و كانت $K \subseteq \mathbb{C}$ مجموعة متراصة (مترابطة) فإن $f(K)$ متراصة (مترابطة).

(2.3.4) مبرهنة:
ليكن $f\ ,\ g$ دالتين ناقصيتين لهما نفس شبكة الدور Λ ، لهما نفس الأقطاب و الأصفار عند نفس النقاط و من نفس المراتب . عندئذ فإن $f(z)=c\,g(z)$ حيث أن $c\neq 0$ ثابت .

(2.3.5) مبرهنة:
إن عدد الأقطاب و الأصفار للدالة الناقصية f في أي خلية هو عدد منتهي .

(2.3.6) تعريف:
نعرف[1] مرتبة الدالة الناقصية f ، بأنها مجموع مراتب أقطاب f الموجودة داخل الخلية P_a .

(2.3.7) مبرهنة :
لتكن f دالة ناقصية . عندئذ فإن مجموع رواسب f عند الأقطاب الموجودة داخل الخلية P_a يساوي الصفر .

(2.3.8) نتيجة:
لا يمكن للدالة الناقصية أن تمتلك قطباً بسيطاً واحداً فقط في متوازي أضلاع الدور الأساسي أو في أي خلية مثل P_a .
لأن الراسب للدالة f عند القطب البسيط لا يساوي الصفر ، فإذا كانت f تمتلك قطب بسيط واحد فقط فإن هذا يناقض المبرهنة (2.3.7).
و بالتالي فإن مرتبة الدالة الناقصية يجب أن تكون أكبر أو تساوي 2 .
و الدوال الناقصية التي مرتبتها تساوي 2 ، إما أن يكون لها قطبان بسيطان و الراسبان عند هذين القطبين مختلفان بالإشارة فقط ، و هذه الدوال تسمى دوال جاكوبي الناقصية $sn(z),cn(z),dn(z),....$ و التي سندرسها في الفصل الثالث، أو أن يكون لها قطب مضاعف و الراسب عند هذا القطب يساوي الصفر ، و تسمى هذه الدالة بدالة وايرشتراوس الناقصية $\wp(z)$ و التي سندرسها أيضاً بالتفصيل في الفصل الخامس .

(2.3.9) مبرهنة[2]:
مجموع مراتب أقطاب الدالة الناقصية f الواقعة داخل الخلية P_a يساوي مجموع مراتب أصفارها الواقعة داخل P_a .
الإثبات :
لدينا $\varphi(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ دالة ناقصية ، و حسب المبرهنة (0.4.4) لدينا $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial P_a}\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz=N_f-P_f$
حيث أن N_f تدل على عدد الأصفار ، و P_f تدل على عدد الأقطاب للدالة f (مع أخذ المراتب للأقطاب و الأصفار بعين الإعتبار في العد)، و ∂P_a محيط الخلية P_a.
و حسب نظرية الرواسب لدينا مجموع رواسب الدالة $\varphi(z)$ عند الأقطاب الموجودة داخل P_a (مع فرض أن ∂P_a لا يحوي أي صفر للدالة f) يساوي لـ $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial P_a}\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz$
لكن من المبرهنة (2.3.7) نجد أن $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial P_a}\dfrac{f'(z)}{f(z)}dz=0$
و بالتالي فإن $N_f=P_f$. □

[1] بعض المراجع تعرف مرتبة الدالة الناقصية بأنها عدد الأقطاب الموجودة داخل الخلية P_a مع أخذ مراتب هذه الأقطاب بعين الإعتبار في العد . أنظر [6],pp.351، و [3]
[2] معظم المراجع مثل [2] ، [3] ، [48] تصيغ هذه المبرهنة على الشكل التالي:
إذا كانت f دالة ناقصية عندئذ فإن عدد أقطاب f الواقعة داخل الخلية P_a مع أخذ مراتب هذه الأقطاب بعين الإعتبار في العد ، يساوي عدد أصفارها الواقعة داخل P_a أيضا مع أخذ المراتب لهذه الأصفار بعين الإعتبار في العد .

(2.3.10) نتيجة:
لتكن $f(z)$ دالة ناقصية ، و ليكن c عدد عقدي . عندئذ مجموع مراتب الأصفار للدالة $f(z)-c$ و الواقعة داخل الخلية P_a يساوي مرتبة[1] الدالة f .

(2.3.11) مبرهنة : العلاقة بين الأصفار و الأقطاب للدالة الناقصية
لتكن f دالة ناقصية و لتكن $a_1,...,a_n$ أصفار f و $b_1,...,b_n$ أقطاب f (مع أخذ المراتب بعين الإعتبار في العد) عندئذ $a_1+a_2+...+a_n \equiv b_1+b_2+...+b_n \pmod{\Lambda}$ حيث أن Λ هي شبكة الدور لـ f .

[1] بعض المراجع مثل ([2],pp.263) و ([3],pp.71) تعرف مرتبة الدالة الناقصية f بأنها عدد جذور المعادلة $f(z)=c$ مع أخذ مراتب هذه الجذور بعين الإعتبار في العد . أي أن مرتبة f هي مجموع مراتب أصفار الدالة $f(z)-c$.

"الفصل الثالث"

دوال جاكوبي الناقصية
Jacobian Elliptic Functions

عرّفنا في الفصل الأول في (1.10) دوال جاكوبي sn, cn, dn بمتغير حقيقي ، و سنقوم في هذا الفصل بتمديد هذه التعاريف إلى المستوي العقدي $\mathbb{C}$ و تعريف دوال جاكوبي الناقصية بمتغير عقدي ، و دراسة هذه الدوال. و سيتم ذلك بثلاث خطوات ، الأولى تمديد التعاريف (1.10) إلى المحور التخيلي ، و الثانية إيجاد صيغ الإضافة للدوال sn, cn, dn ، و الثالثة تمديد هذه الدوال إلى المستوي العقدي عن طريق صيغ الإضافة .

و في هذا الفصل اعتمدنا على المراجع التالية: 48 ,47 ,43 ,42 ,41 ,34 ,28 ,27 ,21 ,18 ,9 ,8 ,4 , 3, 1

(3.1) صيغة نصف الزاوية: the half-angle formulae .

لتكن $t = tg\left(\psi/2\right)$;$(-\pi < \psi < \pi)$. عندئذ فإن:

$$1-k^2\sin^2\psi = \frac{1+2(1-2k^2)t^2+t^4}{(1+t^2)^2} \quad ; 0 \le k < 1$$

و بوضع $Q(t,k) = 1+2(1-2k^2)t^2+t^4$. نجد أن: $1-k^2\sin^2\psi = \dfrac{Q(t,k)}{(1+t^2)^2}$

و منه فإن $K = K(k) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$ ستصبح بالشكل :

$$K = K(k) = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{Q(t,k)}} \quad .... \quad (3.1)$$

و $x = \displaystyle\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$ ستصبح بالشكل :

$$x = x(t) = 2\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{Q(t,k)}} \quad .... \quad (3.2)$$

مع ملاحظة أن $Q(t,k) > 0$ من أجل $-\infty < t < \infty$ و بشرط $0 \le k < 1$. حيث أن:

$$Q(t,k) = 1+2(1-2k^2)t^2+t^4 = \left[t^2+(1-2k^2)^2\right]^2 + 4k^2(1-k^2)$$

كما أن $-2K < x < 2K$.

و بالتالي فإنه بالعودة إلى تعريف الدوال sn, cn, dn في (1.10) و انطلاقاً من (3.1) كتعريف لـ K نجد أنه من أجل $-2K < x < 2K$ ، يكون لدينا:

$$sn(x,k)=\sin\psi=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$cn(x,k)=\cos\psi=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$dn(x,k)=\left(1-k^2\sin^2\psi\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{Q(t,k)}}{1+t^2}\qquad .... (3.3)$$

حيث أن $t=t(x)$ في الصيغ (3.3) هي دالة فردية متزايدة ، حيث أن $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{Q(t,k)}>0$.

و منه فإن الصيغ (3.3) تعرّف الدوال sn,cn,dn من أجل $-2K<x<2K$.

و نلاحظ أن sn هي دالة فردية و الدالتان cn,dn زوجيتان .

وجدنا في (1.3) في الفصل الأول أن:

$$sn(x+4K)=sn(x),cn(x+4K)=cn(x),dn(x+4K)=dn(x)$$

لكن كل جوار لـ $x=\mp 2K$ يتقاطع مع $\left]-2K,2K\right[$ بمجموعة غير خالية و بالتالي فإن النقاط $\mp 2K$ و المضاعفات الفردية لها ، أي النقاط $\{x=2(2n+1)K\ ;\ n\in\mathbb{Z}\}$ هي نقط إنقطاع[1] للدوال sn,cn,dn ، لكنها قابلة للإزالة لأنه بملاحظة أن:

$$x=2\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{Q(t,k)}}\xrightarrow{t\to\pm\infty}2\int_0^{\pm\infty}\frac{dt}{\sqrt{Q(t,k)}}=\pm 2K$$

فإن:

$$sn(\mp 2K)=\lim_{x\to\pm 2K}sn(x)=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{2t}{1+t^2}=0$$
$$cn(\mp 2K)=\lim_{x\to\pm 2K}cn(x)=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1$$
$$dn(\mp 2K)=\lim_{x\to\pm 2K}dn(x)=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\sqrt{Q(t,k)}}{1+t^2}=1$$

و بالتالي[2] فإنه يمكن تمديد $\left]-2K,2K\right[$ إلى $\mp 2K$ بحيث تصبح الدوال sn,cn,dn مستمرة عند $x=\mp 2K$

و بما أن الدوال sn,cn,dn دورية فإنها ستصبح معرّفة و مستمرة على كامل $\mathbb{R}$.

كما أنه من أجل $-2K<x<2K$ و $0\le k<1$ يكون:

$$sn'(x)=\frac{d}{dx}sn(x)=\frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{\sqrt{Q(t,k)}}{1+t^2}=cn(x)dn(x)\qquad .... (3.4)$$

و بما أن: $sn(x+4K)=sn(x),cn(x+4K)=cn(x),dn(x+4K)=dn(x)$

فإن (3.4) ستكون محققة من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ باستثناء المضاعفات الفردية لـ $\mp 2K$ أي باستثناء النقاط $\{x=2(2n+1)K\ ;n\in\mathbb{Z}\}$ ، إلا أن (3.4) ستكون محققة عند هذه النقاط حسب القضية التالية:

قضية (3.1.1):

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة عند $x=a$ و قابلة للإشتقاق في جوار محذوف لـ a ، و بفرض أن $A=\lim_{x\to a}f'(x)$ موجودة. عندئذ فإن $f'(a)$ ستكون موجودة و مساوية لـ A .

---

[1] سوف نسمي كل نقطة x_0 لا تنتمي إلى مجموعة تعريف الدالة $f(x)$ و بحيث يتقاطع كل جوار لـ x_0 مع مجموعة تعريف f بمجموعة غير خالية ، نقطة إنقطاع لهذه الدالة .

[2] إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على $I\setminus\{x_0\}\subset\mathbb{R}$ و كان لـ f نهاية محدودة عندما $x\to x_0$ ، فإنه يمكننا أن تمديد مجموعة تعريف f إلى النقطة x_0 بحيث تصبح f مستمرة عند x_0

و كذلك الأمر بالنسبة لـ cn' و dn' حيث أن:

$$cn'(x) = \frac{d}{dx}cn(x) = -sn(x)dn(x)$$
$$dn'(x) = \frac{d}{dx}dn(x) = -k^2 sn(x)cn(x)$$

(3.2) التمديد إلى المحور التخيلي:(**تحويل جاكوبي التخيلي**) Jacobi's imaginary transformation

لنضع $t = is$ و $x = iy$. عندئذ سيكون:

$$Q(is,k) = 1+2(1-2k^2)i^2s^2+s^4 = 1+2(1-2k'^2)s^2+s^4 = Q(s,k')$$

و منه فإن (3.2) ستصبح بالشكل:

$$y = 2\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{Q(s,k')}} \qquad .... (3.5)$$

و سيكون لدينا كما في (3.1) :

$$K' = K(k') = 2\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{Q(s,k')}} \qquad .... (3.6)$$

و منه إذا كان $-2K' < y < 2K'$ ، فإننا نعرّف :

$$sn(iy,k) = \frac{2t}{1+t^2} = i\,\frac{2s}{1-s^2} = i\,\frac{2s}{1+s^2}\frac{1+s^2}{1-s^2} = i\,\frac{sn(y,k')}{cn(y,k')}$$

$$cn(iy,k) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1+s^2}{1-s^2} = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}\right)^{-1} = \frac{1}{cn(y,k')}$$

$$dn(iy,k) = \frac{\sqrt{Q(t,k)}}{1+t^2} = \frac{\left(Q(s,k')\right)^{1/2}}{1-s^2} = \frac{\left(Q(s,k')\right)^{1/2}}{1+s^2}\frac{1+s^2}{1-s^2} = \frac{dn(y,k')}{cn(y,k')} \qquad .... (3.7)$$

بشرط $cn(y,k') \neq 0$ أي $y \neq \mp K'$ و منه $s \neq \mp 1$.

إن التعبير عن الدوال $sn(iy,k), cn(iy,k), dn(iy,k)$ بدلالة دوال جاكوبي sn, cn, dn و التي تكون فيها المتغيرات حقيقية، يُدعى بتحويل جاكوبي التخيلي.

و يكون لهذه التعابير معنى من أجل كل $y \not\equiv K'(\mathrm{mod}\, 2K')$.

و لذلك يمكننا إستخدام هذه التعابير لتعريف الدوال sn, cn, dn كدوال معرّفة على المحور التخيلي و مستمرة إلا عند النقاط iK' و المضاعفات الفردية لها أي عند النقاط

$$y = (2n+1)K'; n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y \equiv K'(\mathrm{mod}\, 2K')$$

و سيكون لدينا الدالتين $cn(z), dn(z)$ (حيث أن z عدد تخيلي) كل منهما دالة دورية دورها التخيلي $4iK'$ و الدالة $sn(z)$ أيضاً دورية دورها التخيلي $2iK'$.

و عندما يكون $t = is$ بحيث $s \neq \mp 1$ و $x = iy$ بحيث $-2K' < y < 2K'$ و $y \neq \mp K'$ ، فإن:

$$\frac{d\,sn(iy,k)}{d(iy)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{dt}{d(iy)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{ds}{dy}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{Q(s,k')}}{2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{Q(t,k)}}{2}$$
$$= \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt{Q(t,k)}}{1+t^2} = cn(iy,k)dn(iy,k) \qquad .... (3.8)$$

و بما أن $sn(iy,k)$ دالة دورية ، و بالإعتماد على القضية (3.1.1) نجد أن (3.8) محققة من أجل كل

$$y \neq (2n+1)K'; n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y \not\equiv K'(\mathrm{mod}\, 2K')$$

و بشكل مماثل نجد أن:

$$\frac{d\, cn(iy,k)}{d(iy)} = -sn(iy,k)\,dn(iy,k)$$

$$\frac{d\, dn(iy,k)}{d(iy)} = -k^2\, sn(iy,k)\,cn(iy,k)$$

و علاقات الإشتقاق الأخيرة محققة من أجل $y \not\equiv K'(\mathrm{mod}\ 2K')$.

(3.3) صيغ الإضافة (المجموع) لدوال جاكوبي sn, cn, dn : the addition formulas

(3.3.1) مبرهنة:

لتكن $u,v \in \mathbb{R}$ و $0 < k < 1$ عندئذ :

$$sn(u+v) = S(u,v) = \frac{sn(u)cn(v)dn(v) + sn(v)cn(u)dn(u)}{1-k^2 sn^2(u) sn^2(v)}$$

$$cn(u+v) = C(u,v) = \frac{cn(u)cn(v) - sn(u)sn(v)dn(u)dn(v)}{1-k^2 sn^2(u) sn^2(v)}$$

$$dn(u+v) = D(u,v) = \frac{dn(u)dn(v) - k^2 sn(u)sn(v)cn(u)cn(v)}{1-k^2 sn^2(u) sn^2(v)} \qquad ....(3.9)$$

(3.3.2) ملاحظة:

إذا كانت هناك حاجة لإظهار الوسيط $0 < k < 1$ في صيغ الإضافة (3.9)، فإننا نكتب:

$$sn(u+v,k) = \frac{sn(u,k)cn(v,k)dn(v,k) + sn(v,k)cn(u,k)dn(u,k)}{1-k^2 sn^2(u,k) sn^2(v,k)}$$

و بالمثل بالنسبة لـ $cn(u+v,k)$ و $dn(u+v,k)$.

بأخذ $u = v$ في صيغ الإضافة (3.9) نجد أن:

$$sn(2u) = \frac{2sn(u)cn(u)dn(u)}{1-k^2 sn^4(u)}$$

$$cn(2u) = \frac{cn^2(u) - sn^2(u)dn^2(u)}{1-k^2 sn^4(u)} = \frac{1-2sn^2(u) + k^2 sn^4(u)}{1-k^2 sn^4(u)}$$

$$dn(2u) = \frac{dn^2(u) - k^2 sn^2(u)cn^2(u)}{1-k^2 sn^4(u)} = \frac{1-2k^2 sn^2(u) + k^2 sn^4(u)}{1-k^2 sn^4(u)}$$

و منه فإن:

$$1-cn(2u) = \frac{2sn^2(u)dn^2(u)}{1-k^2 sn^4(u)} \ , \ 1+dn(2u) = \frac{2dn^2(u)}{1-k^2 sn^4(u)}$$

و بالتالي فإن: $sn^2(u) = \dfrac{1-cn(2u)}{1+dn(2u)}$ ، و منه :

$$sn\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cn(u)}{1+dn(u)}}, cn\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{cn(u)+dn(u)}{1+dn(u)}} \ , \ dn\left(\frac{u}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-k^2+dn(u)+k^2 cn(u)}{1+dn(u)}}$$

حيث أنه مهما يكن $u \in \mathbb{R}$ فإن $cn(2u) \in [-1,1]$ و $dn(2u) > 0$

و بأخذ $u = K$ نجد أن:

$$sn\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+k'}} \ , \ cn\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}} \ , \ dn\left(\frac{K}{2}\right) = \sqrt{k'}$$

حيث أن $k' = \sqrt{1-k^2}$ (المقاس المتمم) .

(3.4) التمديد إلى المستوي العقدي: ([3],pp.35) .

وجدنا في الفقرة(3.2) أن:

$$\frac{d\, sn(iy,k)}{d(iy)} = cn(iy,k)dn(iy,k) \ , \quad \frac{d\, cn(iy,k)}{d(iy)} = -sn(iy,k)dn(iy,k)$$

$$\frac{d\, dn(iy,k)}{d(iy)} = -k^2 sn(iy,k)cn(iy,k)$$

و ذلك مهما تكن $y \in \mathbb{R}$ ، و هذا يعني أن علاقات الإشتقاق للدوال sn, cn, dn تبقى محققة من أجل الأعداد التخيلية لكن بشرط $y \neq (2n+1)K' \ \ (n \in \mathbb{Z})$.

و بالتالي فإن صيغ الإضافة (3.9) تبقى صحيحة من أجل u,v أعداد تخيلية بشرط أن لا تكون u و v و $u+v$ مساوية لـ $(2n+1)iK'$ مهما تكن $n \in \mathbb{Z}$ و ذلك من أجل تجنب النقاط الشاذة.

و الإثبات يبقى نفسه كما في حالة $u,v \in \mathbb{R}$.

و بالتالي فإنه يمكننا أن نعرّف الدوال $sn(x+iy), cn(x+iy), dn(x+iy)$ كما يلي:

$$sn(x+iy) := S(x,iy) \ , \ cn(x+iy) := C(x,iy) \ , \ dn(x+iy) := D(x,iy)$$

حيث أن $x,y \in \mathbb{R}$ و بشرط $y \neq (2n+1)K' \ \ (n \in \mathbb{Z})$

أي أن:

$$sn(z) = sn(x+iy) = S(x,iy) = \frac{sn(x)cn(iy)dn(iy) + sn(iy)cn(x)dn(x)}{1-k^2 sn^2(x) sn^2(iy)}$$

$$= \frac{sn(x,k)dn(y,k') + i\, sn(y,k')cn(y,k')cn(x,k)dn(x,k)}{cn^2(y,k') + k^2 sn^2(x,k) sn^2(y,k')} \quad \text{...........} \ (3.10)$$

حيث أن $0 < k < 1$ و عندما يكون $k = 0$ أو $k = 1$ فإننا نحصل على الدوال المثلثية أو المثلثية القطعية.

حيث أن:

$$sn(x+iy,0) = \sin(x+iy) \ , \ cn(x+iy,0) = \cos(x+iy) \ , \ dn(x+iy,0) = 1$$

$$sn(x+iy,1) = th(x+iy) \ , \ cn(x+iy,1) = dn(x+iy,1) = \frac{1}{ch(x+iy)}$$

و لن يكون لـ (3.10) معنى عندما يكون $cn(y,k') = 0$ و $sn(x,k) = 0$ معاً .

لكن:

$$cn(y,k') = 0 \Rightarrow y \equiv K' \bmod(2K') \Rightarrow y = (2n+1)K' \ ; \ n \in \mathbb{Z}$$

$$sn(x,k) = 0 \Rightarrow x \equiv 0 \bmod(2K) \Rightarrow x = 2mK \ ; \ m \in \mathbb{Z}$$

و بالتالي فإن:

$$cn(y,k') = 0 \ \ and \ \ sn(x,k) = 0 \Leftrightarrow x = 2mK \ \ and \ \ y = (2n+1)K'$$

لذلك سنمدد التعريف $sn(x+iy) := S(x,iy)$ إلى المجموعة المفتوحة و المترابطة:

$$M = \mathbb{C} \setminus \{x+iy \in \mathbb{C} \ ; x = 2mK \ , y = (2n+1)K', \ m,n \in \mathbb{Z}\}$$

فإذا كان لدينا $0 < k < 1$ و $x+iy \in M$ فإن $sn(x+iy) := S(x,iy)$ ، أي:

$$sn(x+iy) = \frac{sn(x,k)dn(y,k') + i\, sn(y,k')cn(y,k')cn(x,k)dn(x,k)}{cn^2(y,k') + k^2 sn^2(x,k) sn^2(y,k')} \quad \text{..........} \ (3.11)$$

و بوضع $f(x,y) = f_1(x,y) + i\, f_2(x,y) = S(x,iy)$ نجد أن:

$f(x,y) \in C^1(M)$ ، أي أن f قابلة للإشتقاق الجزئي بالنسبة لـ x و y ومشتقاتها الجزئية مستمرة في M حيث أن $f_1(x,y)$ و $f_2(x,y)$ دالتين حقيقيتين كل منهما قابلة للإشتقاق الجزئي بالنسبة لـ x و y و مشتقاتها الجزئية مستمرة في M .

و بنفس الأسلوب نمدد تعريفي $cn(x+iy)$ و $dn(x+iy)$ إلى M بالشكل:

$$cn(x+iy)=\frac{cn(x,k)cn(y,k')-isn(x,k)sn(y,k')dn(x,k)dn(y,k')}{cn^2(y,k')+k^2sn^2(x,k)sn^2(y,k')} \quad ....(3.12)$$

$$dn(x+iy)=\frac{dn(x,k)cn(y,k')dn(y,k')-ik^2sn(x,k)cn(x,k)sn(y,k')}{cn^2(y,k')+k^2sn^2(x,k)sn^2(y,k')} ....(3.13)$$

كما أن $dn(x+iy)$ و $cn(x+iy)$ هي دوال تنتمي إلى $C^1(M)$.

و عندما يكون $y\neq(2n+1)K'$ ، و بما أن[1] $S(u,v)=S(v,u)$ ، أي $S(x,iy)=S(iy,x)$ فإن:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial iy}=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial iy}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

و العلاقة الأخيرة محققة من أجل $z=x+iy\in M$ ، و بحيث:

$$f(x,y)=S(x,iy)=sn(x+iy)=f_1(x,y)+i\,f_2(x,y)$$

كما أن[2]:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+i\,\frac{\partial f_2}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f_1}{\partial y}+i\,\frac{\partial f_2}{\partial y}$$

و بما أن $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$ ، فإننا نجد أن: $\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial y}=-\frac{\partial f_2}{\partial x}$

و منه فإن معادلات كوشي ريمان للدالة $sn(z)$ محققة على M و كل من $f_1(x,y),f_2(x,y)$ قابلة للإشتقاق الجزئي بالنسبة لـ x و y و المشتقات الجزئية مستمرة في M و بالتالي فإن $sn(z)$ تحليلية على M.

و بمناقشة مماثلة لما سبق نجد أن $cn(z)$ و $dn(z)$ هي دوال تحليلية على M.

(3.4.1) مبرهنة:

لتكن الدوال $sn(z),cn(z),dn(z)$ و المعرفة بـ (3.11) ، (3.12) ، (3.13) حيث أن $z=x+iy$.

عندئذ من أجل $z\in M$ يكون:

$$\frac{d}{dz}sn(z)=cn(z)dn(z)\ ,\ \frac{d}{dz}cn(z)=-sn(z)dn(z)\ ,\ \frac{d}{dz}dn(z)=-k^2sn(z)cn(z)$$

(3.4.2) ملاحظة:

إن صيغ الإضافة المعرفة في المبرهنة (3.3.1) ستبقى صحيحة من أجل $u,v\in\mathbb{C}$ بشرط أن تكون u و v و $u+v$ منتمية إلى M.

و ذلك لأن علاقات الإشتقاق للدوال $sn(z),cn(z),dn(z)$ صحيحة من أجل $z\in\mathbb{C}$ ، و بالتالي فإن الإثبات يبقى نفسه كما في المبرهنة (3.3.1)، و بذلك ينتج لدينا أنه مهما يكن $u,v\in\mathbb{C}$ فإن:

$$sn(u+v)=\frac{sn(u)cn(v)dn(v)+sn(v)cn(u)dn(u)}{1-k^2sn^2(u)sn^2(v)}$$

$$cn(u+v)=\frac{cn(u)cn(v)-sn(u)sn(v)dn(u)dn(v)}{1-k^2sn^2(u)sn^2(v)}$$

$$dn(u+v)=\frac{dn(u)dn(v)-k^2sn(u)sn(v)cn(u)cn(v)}{1-k^2sn^2(u)sn^2(v)} \quad ....\ (3.14)$$

---

[1] $S(u,v)=S(v,u)$ في حالة $u,v\in\mathbb{R}$ و كذلك في حالة u,v أعداد تخيلية لأن صيغ الإضافة محققة في كلا الحالتين.

[2] أنظر [21] التعريف 2.2

(3.5) الخصائص الدورية لدوال جاكوبي الناقصية:

لنبين أولاً أن: $sn(K+iK')=k^{-1}$

$cn(K+iK')=-i\,k'k^{-1}$

$dn(K+iK')=0$ .... (3.15)

لدينا: $K'=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k'^2t^2}}$ ، و لنفرض أن $s=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2t^2}}$. فنجد أن:

$$K'=\int_1^{1/k}\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}\sqrt{1-k^2s^2}}=\int_1^{1/k}\frac{ds}{i\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}}=-i\int_1^{1/k}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}\sqrt{1-k^2s^2}}$$

أي أن:

$$K+iK'=\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}+\int_1^{1/k}\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}=\int_0^{1/k}\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

و منه: $sn(K+iK')=k^{-1}$ ، و بالتالي :

$$cn(K+iK')=\sqrt{1-sn^2(K+iK')}=\sqrt{1-k^{-2}}=-ik'k^{-1}$$

$$dn(K+iK')=\sqrt{1-k^2sn^2(K+iK')}=0$$

بما أن: $sn(K)=1, cn(K)=0, dn(K)=k'$ ، فإنه مهما يكن $u\in\mathbb{C}$ و بأخذ $v=K$ في صيغ الإضافة (3.14) نجد أن :

$sn(u+K)=cn(u)/dn(u)$

$cn(u+K)=-k'sn(u)/dn(u)$

$dn(u+K)=k'/dn(u)$ .... (3.16)

و بالتالي فإن: $sn(u+4K)=sn(u+2K+2K)=-sn(u+2K)=sn(u)$

$cn(u+4K)=cn(u)\quad,\quad dn(u+4K)=dn(u)$

و بشكل عام نجد أنه مهما يكن $m\in\mathbb{Z}$ فإن:

$sn(u+2mK)=(-1)^m\,sn(u)$

$cn(u+2mK)=(-1)^m\,cn(u)$

$dn(u+2mK)=dn(u)$ .... (3.17)

و بهذا نجد أن الدالتين $cn(u), sn(u)$ كل منهما دالة دورية دورها الأصغري $4K$ و الدالة $dn(u)$ دورية دورها الأصغري $2K$.

لنأخذ الآن $v=K+iK'$ و $u\in\mathbb{C}$ في صيغ الإضافة (3.14) و بالإعتماد على (3.15) نجد أن:

$sn(u+K+iK')=dn(u)/k\,cn(u)$

$cn(u+K+iK')=-i\,k'/k\,cn(u)$

$dn(u+K+iK')=i\,k'sn(u)/cn(u)$ .... (3.18)

و منه فإن: $sn(u+2K+2iK')=\frac{dn(u+K+iK')}{k\,cn(u+K+iK')}=-sn(u)$

أي أن:

$sn(u+2K+2iK')=-sn(u)$

$cn(u+2K+2iK')=cn(u)$

$dn(u+2K+2iK')=-dn(u)$ .... (3.19)

و بالتالي فإن:

$$sn(u+4K+4iK')=sn(u)$$
$$cn(u+4K+4iK')=cn(u)$$
$$dn(u+4K+4iK')=dn(u) \qquad .... \quad (3.20)$$

و بهذا نجد أن الدالتين $sn(u), dn(u)$ كل منهما لها الدور $4K+4iK'$ و الدالة $cn(u)$ لها الدور الأصغري $2K+2iK'$.

و بالإعتماد على صيغ الإضافة (3.14) مرة أخرى و على(3.18) نجد أن:

$$sn(u+iK')=sn(u-K+K+iK')=\frac{dn(u-K)}{k\,cn(u-K)}=\frac{k'/dn(u)}{k\,k'sn(u)/dn(u)}=\frac{1}{k\,sn(u)}$$

أي أن:

$$sn(u+iK')=\frac{1}{k\,sn(u)} \qquad .... \quad (3.21)$$

و بشكل مشابه نجد أن:

$$cn(u+iK')=cn(u-K+K+iK')=\frac{-i\,k'}{k\,cn(u-K)}=\frac{-i\,dn(u)}{k\,sn(u)}$$

$$dn(u+iK')=\frac{-i\,cn(u)}{sn(u)} \qquad .... \quad (3.22)$$

و من (3.21) و (3.22) نجد أن:

$$sn(u+2iK')=sn(u+iK'+iK')=sn(u)$$
$$cn(u+2iK')=-cn(u)$$
$$dn(u+2iK')=-dn(u) \qquad .... \quad (3.23)$$

و بالتالي فإن:

$$sn(u+4iK')=sn(u+2iK')=sn(u)$$
$$cn(u+4iK')=cn(u)$$
$$dn(u+4iK')=dn(u) \qquad .... \quad (3.24)$$

و بشكل عام نجد أنه مهما تكن $m\in\mathbb{Z}$ فإن:

$$sn(u+2miK')=sn(u)$$
$$cn(u+2miK')=(-1)^m cn(u)$$
$$dn(u+2miK')=(-1)^m dn(u) \qquad .... \quad (3.25)$$

و بهذا نجد أن الدالتين $dn(u), cn(u)$ كل منهما تملك الدور $4iK'$ بينما الدالة $sn(u)$ لها الدور الأصغري $2iK'$ ، كما أنه و بالإعتماد على صيغ الإضافة (3.14) و على (3.17) و (3.25) نجد:

$$sn(u+2mK+2n\,iK')=(-1)^m sn(u)$$
$$cn(u+2mK+2n\,iK')=(-1)^{m+n} cn(u)$$
$$dn(u+2mK+2n\,iK')=(-1)^n dn(u) \qquad ;\ (\forall\, m,n\in\mathbb{Z})$$

نلاحظ أن النقاط $mK+n\,iK'$ حيث $m,n\in\mathbb{Z}$ تشكل شبكة في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ مولّدة بـ K و iK' .

و نلاحظ أن مجموعة النقاط $z=4mK+4n\,iK'$ هي شبكة جزئية من الشبكة السابقة و هي شبكة دور الدوال $sn\,,\,cn\,,\,dn$. إلا أن كل دالة من الدوال $sn\,,cn\,,dn$ لها شبكة دور مختلفة عن الأخرى، أساس كل شبكة مُعطى بالشكل:

$$sn(u)\ :\ 4K\,,\,2iK'$$
$$cn(u)\ :\ 4K\,,2K+2iK'$$
$$dn(u)\ :\ 2K\,,\,4iK' \qquad .... \quad (3.26)$$

و هذا يعني أن الدالة $sn(u)$ $(u \in \mathbb{C})$ هي دالة مزدوجة الدورية ، زوج الدور الإبتدائي لها هو $w_1 = 4K, w_2 = 2iK'$ وشبكة الدور لها هي:

$$\Lambda_{sn} = \{w = mw_1 + nw_2 = 4mK + 2n\, iK'; m,n \in \mathbb{Z}\}$$

و كذلك الأمر بالنسبة للدالة $cn(u)$ ، زوج الدور الإبتدائي لها هو $(4K, 2K + 2iK')$ ، و شبكة الدور لها هي:

$$\Lambda_{cn} = \{w = 4mK + 2nK + 2n\, iK'; m,n \in \mathbb{Z}\}$$

و الدالة $dn(u)$ زوج الدور الإبتدائي لها هو $(2K, 4iK')$ و شبكة الدور لها هي:

$$\Lambda_{dn} = \{w = 2mK + 4n\, iK'; m,n \in \mathbb{Z}\}$$

(3.6) نشر دوال جاكوبي الناقصية بجوار الصفر و iK' وتصنيف النقاط الشاذة لها:

لتكن $M = \mathbb{C} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C}; x = 2mK, y = (2n+1)K'; (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$

من أجل $u \in M$ وجدنا أن: $\frac{d}{du} sn(u) = cn(u)dn(u)$

و بما أن $sn(u)$ دالة فردية ، فإنه سيكون لدينا من أجل قيم صغيرة[1] لـ $|u|$:

$$sn(u) = u - \frac{1+k^2}{6}u^3 + \frac{(1+14k^2+k^4)}{5!}u^5 - \frac{(1+135k^2+135k^4+k^6)}{7!}u^7 + ...$$
$$= u - \frac{1+k^2}{6}u^3 + u^5\left(\frac{1+14k^2+k^4}{5!} - Au^2 + Bu^4 - ....\right)$$

حيث أن A و B ثوابت تتبع لـ k . و منه:

$$sn(u) = u - \frac{1+k^2}{6}u^3 + O(u^5) \qquad .... \ (3.27)$$

و بما أن $dn(u), cn(u)$ دوال زوجية فبأسلوب مماثل نجد أن:

$$cn(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + O(u^4) \qquad .... \ (3.28)$$

$$dn(u) = 1 - \frac{1}{2}k^2u^2 + O(u^4) \qquad .... \ (3.29)$$

نعلم أن: $sn(u + iK') = 1/k\ sn(u)$ ، و بالتالي فإنه من (3.27) نجد:

$$sn(u+iK') = \frac{1}{k\,u} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+k^2}{6}u^2 + O(u^4)} = \frac{1}{k\,u}\left[1 + \frac{1+k^2}{6}u^2 + O(u^4)\right]$$
$$= \frac{1}{k\,u} + \frac{1+k^2}{6k}u + O(u^3) \qquad .... \ (3.30)$$

---

[1] $f(x) = O(g(x)); x \to a$ تعني أن $|f(x)/g(x)| \xrightarrow{x \to a} A$ و A عدد محدود .

$f(x) = o(g(x)); x \to a$ تعني أن $|f(x)/g(x)| \xrightarrow{x \to a} 0$

$f(x) \sim g(x); x \to a$ تعني أن $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \to a} 1$

و بنفس الأسلوب نجد أن:

$$cn(u+iK')=\frac{-i}{k}\frac{dn(u)}{sn(u)}=-i\ sn(u+iK')\cdot dn(u)$$
$$=\frac{-i}{k\,u}+\frac{2k^2-1}{6k}iu+O(u^3) \qquad .... \quad (3.31)$$

و كذلك:

$$dn(u+iK')=\frac{-i\ cn(u)}{sn(u)}=-i\ k\ \frac{cn(u)}{k\ sn(u)}=-i\ k\ sn(u+iK')\cdot cn(u)$$
$$=-i\ k\left[\frac{1}{k\,u}+\frac{k^2-2}{6k}u+O(u^3)\right]$$

أي أن:

$$dn(u+iK')=\frac{-i}{u}+\frac{2-k^2}{6}iu+O(u^3) \qquad .... \quad (3.32)$$

لكن نعلم أن الدوال $sn(u),cn(u),dn(u)$ تحليلية على M و النقاط $u=2mK+(2n+1)iK'$ هي نقاط شاذة لهذه الدوال ، و بأخذ $m=n=0$ نجد أن iK' هي إحدى النقاط الشاذة و بالتالي فإنه من (3.30) و (3.31) و (3.32) نجد أن نشر لوران لهذه الدوال بجوار iK' هو:

$$sn(u)=sn(u-iK'+iK')=\frac{1}{k(u-iK')}+\frac{1+k^2}{6k}(u-iK')+O\left((u-iK')^3\right)$$

$$cn(u)=cn(u-iK'+iK')=\frac{-i}{k(u-iK')}+\frac{2k^2-1}{6k}i(u-iK')+O\left((u-iK')^3\right)$$

$$dn(u)=dn(u-iK'+iK')=\frac{-i}{(u-iK')}+\frac{2-k^2}{6}i(u-iK')+O\left((u-iK')^3\right)$$

و منه فإننا نجد أن iK' هي قطب بسيط لـ $sn(u)$ و $cn(u)$ و $dn(u)$. كما أن:

$$\mathrm{Res}(sn;iK')=k^{-1}\ ,\ \mathrm{Res}(cn;iK')=-i\ k^{-1}\ ,\ \mathrm{Res}(dn;iK')=-i$$

و نلاحظ أن: $sn(u+2K+iK')=-sn(u+iK')=\dfrac{-1}{k\,u}+O(u)$ ، و بالتالي:

$$sn(u)=sn\left(u-(2K+iK')+(2K+iK')\right)=\frac{-1}{k\left(u-(2K+iK')\right)}+O\left(u-(2K+iK')\right)$$

و منه فإن النقطة $2K+iK'$ هي قطب بسيط للدالة $sn(u)$ و الراسب عندها يساوي $-k^{-1}$

و بشكل مشابه نجد:

$$cn(u+2K+iK')=-cn(u+iK')=\frac{i}{k\,u}-\frac{2k^2-1}{6k}iu-O(u^3)=\frac{i}{k\,u}+O(u)$$

و بالتالي:
$$cn(u)=\frac{i}{k\left(u-(2K+iK')\right)}+O\left(u-(2K+iK')\right)$$

و منه فإن النقطة $2K+iK'$ هي قطب بسيط للدالة $cn(u)$ و الراسب عندها يساوي ik^{-1} .

و أخيراً من (3.23) و (3.32) نجد أن:

$$dn(u+3iK')=dn(u+iK'+2iK')=-dn(u+iK')=\frac{i}{u}-\frac{(2-k^2)}{6}iu-O(u^3)=\frac{i}{u}+O(u)$$

و بالتالي:
$$dn(u)=\frac{i}{(u-3iK')}+O\left((u-3iK')\right)$$

و منه فإن النقطة $3iK'$ هي قطب بسيط للدالة $dn(u)$ و الراسب عندها يساوي i .

و بما أن الدوال $sn(u), cn(u), dn(u)$ مزدوجة الدورية زوج الدور الإبتدائي لكل منها على الترتيب هو $(4K, 2iK'), (4K, 2K+2iK'), (2K, 4iK')$ فإننا نستخلص مما سبق أن:

(1) $sn(u)$ هي دالة تحليلية على $\mathbb{C}$ ، إلا عند مجموعتين من النقاط الشاذة ، عناصرهما أقطاب بسيطة.

الأولى: $u = 4mK + (2n+1)iK'; (m, n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow u \equiv iK'(\mod 4K, 2iK')$

و الراسب عند كل نقطة من نقاط هذه المجموعة يساوي k^{-1} .

و الثانية: $u = (4m+2)K + (2n+1)iK'; (m, n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow u \equiv 2K + iK'(\mod 4K, 2iK')$

و الراسب عند كل نقطة من نقاط هذه المجموعة يساوي $-k^{-1}$.

(2) $cn(u)$ هي دالة تحليلية على $\mathbb{C}$ ، إلا عند مجموعتين من النقاط الشاذة ، عناصرهما أقطاب بسيطة.

الأولى: $u = (4m+2n)K + (2n+1)iK' \Leftrightarrow u \equiv iK'(\mod 4K, 2K+2iK')$

و الراسب عند كل نقطة من نقاط هذه المجموعة يساوي $-ik^{-1}$.

و الثانية: $u = (4m+2n+2)K + (2n+1)iK' \Leftrightarrow u \equiv 2K + iK'(\mod 4K, 2K+2iK')$

و الراسب عند كل نقطة من نقاط هذه المجموعة يساوي ik^{-1} .

(3) $dn(u)$ هي دالة تحليلية على $\mathbb{C}$ ، إلا عند مجموعتين من النقاط الشاذة ، عناصرهما أقطاب بسيطة.

الأولى: $u = 2mK + (4n+1)iK' \Leftrightarrow u \equiv iK'(\mod 2K, 4iK')$

و الراسب عند كل نقطة من نقاط هذه المجموعة يساوي $-i$.

و الثانية: $u = 2mK + (4n+3)iK' \Leftrightarrow u \equiv 3iK'(\mod 2K, 4iK')$

و الراسب عند كل نقطة من نقاط هذه المجموعة يساوي i.

كما أن الدوال dn, cn, sn هي الدوال الوحيدة التي تكون مزدوجة الدورية و لها الخصائص **(1)** و **(2)** و **(3)** على الترتيب.

(3.7) أصفار الدوال dn, cn, sn:

نعلم أنه إذا كان $z = x + iy \in \mathbb{C}$ فإن:

$$sn(z) = sn(x+iy) = \frac{sn(x,k)dn(y,k') + i\, sn(y,k')cn(y,k')cn(x,k)dn(x,k)}{cn^2(y,k') + k^2 sn^2(x,k) sn^2(y,k')}$$

و منه فإن:

$$\begin{aligned} sn(x+iy) = 0 &\Leftrightarrow sn(x,k) = 0 \quad and \quad sn(y,k') = 0 \\ &\Leftrightarrow x \equiv 0(\mod 2K) \quad and \quad y \equiv 0(\mod 2K') \\ &\Leftrightarrow x = 2mK \quad and \quad y = 2nK' \qquad ; \ (m, n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

و بالتالي فإن:

$$\begin{aligned} sn(z) = sn(x+iy) = 0 &\Leftrightarrow x + iy = 2mK + 2niK' \ ; \ (m, n \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow z \equiv 0(\mod 2K, 2iK') \end{aligned}$$

و نلاحظ هنا أنه أخذنا: $sn(x+iy) = 0 \Leftrightarrow sn(x,k) = 0 \quad and \quad sn(y,k') = 0$

و لم نأخذ: $sn(x+iy) = 0 \Leftrightarrow sn(x,k) = 0 \quad and \quad cn(y,k') = 0$

لأنه في هذه الحالة سنحصل على عدم تعيين.

و من أجل الدالة cn، نجد:

$$\begin{aligned} cn(x+iy) = 0 &\Leftrightarrow cn(x,k) = 0 \quad and \quad sn(y,k') = 0 \\ &\Leftrightarrow x \equiv K(\mod 2K) \quad and \quad y \equiv 0(\mod 2K') \\ &\Leftrightarrow x + iy = (2m+1)K + 2niK' \quad ; (m, n \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow z \equiv K(\mod 2K, 2iK') \end{aligned}$$

و بنفس الأسلوب نجد أن أصفار الدالة dn ستكون بالشكل:

$$dn(z)=dn(x+iy)=0 \Leftrightarrow cn(x,k)=0 \quad and \quad cn(y,k')=0$$
$$\Leftrightarrow x+iy=(2m+1)K+(2n+1)iK' \quad (m,n\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow z\equiv(K+iK')(\bmod 2K,2iK')$$

و مما سبق يمكننا أن نلخص النتائج التي حصلنا عليها بالجدول التالي:

الدالة	زوج الدور الإبتدائي	الأقطاب	الرواسب	الأصفار
$sn(u)$	$4K$ $2iK'$	$u\equiv iK'(\bmod 4K,2iK')$ $u\equiv 2K+iK'(\bmod 4K,2iK')$	k^{-1} $-k^{-1}$	$u\equiv 0(\bmod 2K,2iK')$
$cn(u)$	$4K$ $2K+2iK'$	$u\equiv iK'(\bmod 4K,2K+2iK')$ $u\equiv 2K+iK'(\bmod 4K,2K+2iK')$	$-i\,k^{-1}$ $i\,k^{-1}$	$u\equiv K(\bmod 2K,2iK')$
$dn(u)$	$2K$ $4iK'$	$u\equiv iK'(\bmod 2K,4iK')$ $u\equiv 3iK'(\bmod 2K,4iK')$	$-i$ i	$u=K+iK'(\bmod 2K,2iK')$

ترميز Glaisher لدوال جاكوبي الناقصية و مشتقاتها:

في عام 1881 قام Glaisher بوضع رموز لمقاليب دوال جاكوبي الناقصية sn, cn, dn و للنسب بين هذه الدوال على الشكل التالي[1]:

$$ns=\frac{1}{sn}\ ,\ nc=\frac{1}{cn}\ ,\ nd=\frac{1}{dn}\ ,\ sc=\frac{sn}{cn}\ ,\ sd=\frac{sn}{dn}\ ,\ cd=\frac{cn}{dn}$$
$$cs=\frac{cn}{sn}\ ,\ ds=\frac{dn}{sn}\ ,\ dc=\frac{dn}{cn}$$

و بذلك يصبح لدينا اثنتي عشرة دالة ناقصية لجاكوبي هي:

$$sn\ ,cn\ ,dn\ ,ns\ ,nc\ ,nd\ ,sc\ ,sd\ ,cd\ ,cs\ ,ds\ ,dc$$

و مشتقات هذه الدوال بالنسبة للمتحول u و يمكن استنتاجها مباشرة من الجدول التالي:

	c'	d'	n'	s'
c	0	$-k'^2$	-1	-1
d	k^2	0	$-k^2$	-1
n	1	k^2	0	-1
s	1	1	1	0

فإذا كانت $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ تشير إلى أحد الأحرف c, d, n, s و باعتبار أن $\frac{d}{du}(\alpha\beta)=(\alpha\beta)'=\alpha\beta'$ ، فإن:

$$\alpha\beta'=A_{\alpha\beta'}\cdot\gamma\beta\cdot\delta\beta$$

حيث أن $A_{\alpha\beta'}$ هو العنصر الواقع في السطر α و العمود β' في الجدول السابق.

فمثلاً: $ds'(u,k)=-cs(u,k)\,ns(u,k)$ ، و إذا لم تكن هناك حاجة لإظهار المقاس k و المتحول u فبشكل مختصر نكتب $ds'=-cs\cdot ns$. كما أن:

$$dc'=k^2\,sc\cdot nc\quad ,\quad cn'=-sn\cdot dn\quad ,\ .....$$

[1] الرموز sn, cn, dn وضعها Gudermann في محاضراته في عام 1838 . أنظر [18],pp.8.

(3.8) دوال الليمنسكات : lemniscate functions

يعتبر العالم الفلكي Cassini (1625-1712) أول من درس منحني الليمنسكات ، و يعتبر العالم الرياضي الإيطالي Fagnano أول من اكتشف الخصائص العامة لمنحني الليمنسكات في عام 1750.

إن المعادلة الديكارتية لمنحني الليمنسكات هي $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ حيث $a\in\mathbb{R}$.

و المعادلة القطبية هي $r^2=2a^2\cos(2\theta)$.

و طول منحني الليمنسكات يساوي :

$$l=4a\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}} \quad .... \quad (3.33)$$

لنفرض أن $2\sin^2\theta=\sin^2\varphi$ ، في (3.33)، فنجد أن:

$$l=4a\sqrt{2}\int_0^1\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}=4a\int_0^1\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2\varphi}}$$

أي:

$$l=4a\,K\left(1/\sqrt{2}\right) \quad .... \quad (3.34)$$

لدينا $r^2=2a^2\cos(2\theta)$ و منه $\frac{\sqrt{2}\,a}{r}=\frac{1}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}}$ ، و بالتالي فإنه بالتعويض في (3.33) نجد أن:

$$l=4\sqrt{2}\,a\int_{\sqrt{2}a}^0\frac{-r}{\sqrt{4a^4-r^4}}\cdot\frac{\sqrt{2}\,a}{r}dr=8a^2\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{dr}{\sqrt{4a^4-r^4}}$$

و بفرض $t=\frac{r}{\sqrt{2}\,a}$ في التكامل الأخير نجد:

$$l=4\sqrt{2}\,a\int_0^1\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} \quad .... \quad (3.35)$$

و عندما يكون $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن $l=4\int_0^1\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$.

بالمقارنة بين (3.34) و (3.35) نجد أن $K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$

و بفرض $u=r^4$ نجد أن:

$$K\left(1/\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1(1-u)^{-1/2}u^{-3/4}\,du=\frac{\sqrt{2}}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Gamma\left(1/4\right)\Gamma\left(1/2\right)}{\Gamma\left(3/4\right)}$$

لكن[1] : $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ و منه:

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sqrt{\pi}\left(\Gamma\left(1/4\right)\right)^2}{\left(2\pi/\sqrt{2}\right)\Gamma\left(1/4\right)}=\frac{\left(\Gamma\left(1/4\right)\right)^2}{4\sqrt{\pi}}$$

و بالتالي فإن: $\left(\Gamma\left(1/4\right)\right)^2=4\sqrt{\pi}K\left(1/\sqrt{2}\right)$ ، و أول من حصل على هذه العلاقة هو ليجاندر.

---

[1] الدالة بيتا $B(x,y)$ تعرف بالشكل $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ و تحقق أن $B(x,y)=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$

و الدالة غاما تحقق العلاقة: $(\forall z\in\mathbb{C});\ \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$

و بما أن $\Gamma(1/4)>0$ فإن[1]:

$$\Gamma(1/4)=\left(4\sqrt{\pi}\,K\left(1/\sqrt{2}\right)\right)^{1/2}\simeq 3.625609908221908$$

حيث أن[2] : $K\left(1/\sqrt{2}\right)=1.85407467...$.

ملاحظة: إن $\frac{\tilde{w}}{\sqrt{2}}=\frac{\left(\Gamma(1/4)\right)^2}{4\sqrt{\pi}}=K\left(1/\sqrt{2}\right)$ و منه:

$$\Gamma(1/4)=2\left(\pi/2\right)^{1/4}\sqrt{\tilde{w}}$$

حيث أن: $\tilde{w}\simeq 2.62205755429211981046483958989111941368275495143162$

و يدعى $\tilde{w}$ ثابت الليمنسكات[3] (lemniscate constsnt).

⊛ ليكن لدينا التكامل[4] $\phi=\int_0^x\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$ ، نلاحظ أنه باستبدال r^4 بـ r^2 سنحصل على $\phi=\arcsin x$ و منه

$x=\sin\phi$ ، و بالتالي فإنه بدلاً من كتابة $x=\sin\phi$ (في حالة r^2 بدلاً من r^4)

فإنه تعريفاً سنكتب $x:=\sin lemn\,\phi$

و بالمثل إذا كان $\varphi=\int_x^1\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}$ فإن $x:=\cos lemn\,\varphi$.

ندعو الدوال $\sin lemn$ و $\cos lemn$ بدوال الليمنسكات و يعتبر Gauss (1777-1855) أول من عرّف هذه الدوال و قد رمزها بـ sl و cl على الترتيب .

و لهذه الدوال تشابه كبير مع الدوال المثلثية، كما أنها تحقق[5] :

$$sl(2\theta)=\frac{2(sl\,\theta)\sqrt{1-sl^4\theta}}{1+sl^4\theta}\ ,\ sl(\varphi+\psi)=\frac{(sl\,\varphi)\sqrt{1-sl^4\psi}+(sl\,\psi)\sqrt{1-sl^4\varphi}}{1+sl^4\varphi\cdot sl^4\psi}$$

و $sl(\varphi)=cl\left((w/2)-\varphi\right)$ ، حيث أن w يساوي نصف طول منحني الليمنسكات $r^2=\cos(2\theta)$.

كما أن لدوال الليمنسكات علاقة مع دوال جاكوبي الناقصية تتبين فيما يلي:

إذا كان لدينا $u=\int_y^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}}$ فإن $y=cn(u,k)$.

و بالتالي $u=\int\limits_{cn(y,k)}^{1}\left(1-t^2\right)^{-1/2}\left(k'^2+k^2t^2\right)^{-1/2}dt$.

بأخذ $k=k'=1/\sqrt{2}$ نجد أن:

$$u=\int\limits_{cn(u,1/\sqrt{2})}^{1}\left(1-t^2\right)^{-1/2}\left((1/2)+(1/2)t^2\right)^{-1/2}dt=\sqrt{2}\int\limits_{cn(u,1/\sqrt{2})}^{1}\left(1-t^4\right)^{-1/2}dt$$

و منه $u=\int\limits_{cn(u\sqrt{2},1/\sqrt{2})}^{1}\left(1-t^4\right)^{-1/2}dt$ ، و بالتالي فإنه حسب تعريف الدالة $\cos lemn$ نجد أن:

$$\cos lemn(u)=cl(u)=cn\left(u\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)$$

---

1 أنظر [1],pp.3

2 أنظر [27],pp.640

3 أنظر [1],pp.658

4 يدعى هذا التكامل بتكامل الليمنسكات ، أنظر [18],pp.51

5 أنظر [18],pp.54

و إذا كان: $u = \int_0^{sd(u,k)} \left[(1-k'^2 y^2)(1+k^2 y^2)\right]^{-1/2} dy$ ، و $k = k' = 1/\sqrt{2}$ فإن:

$$u = \int_0^{sd(u,1/\sqrt{2})} \left[\left(1-\frac{1}{2}y^2\right)\left(1+\frac{1}{2}y^2\right)\right]^{-1/2} dy = \int_0^{sd(u,1/\sqrt{2})} \left(1-\frac{1}{4}y^4\right)^{-1/2} dy$$

لنفرض أن: $t = y/\sqrt{2}$ عندئذ $u = \sqrt{2} \int_0^{sd(u,1/\sqrt{2})/\sqrt{2}} \left(1-t^4\right)^{-1/2} dt$

و منه: $\int_0^{sd(u,1/\sqrt{2})/\sqrt{2}} \left(1-t^4\right)^{-1/2} dt = \frac{u}{\sqrt{2}}$ ، أي أن:

$$u = \sqrt{2} \int_0^{sd(u\sqrt{2},1/\sqrt{2})/\sqrt{2}} \left(1-t^4\right)^{-1/2} dt$$

و بالتالي حسب تعريف sinlemn نجد أن:

$$\sin lemn(u) = sl(u) = \left(1/\sqrt{2}\right) sd\left(u\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$$

(3.9) نشر فورييه لدوال جاكوبي الناقصية:

سنقوم في هذه الفقرة بإيجاد نشر فورييه للدالة sn و بأسلوب مماثل يتم إيجاد نشر فورييه للدوال cn و dn .

نعلم أن الدالة $sn(u)$ $(u \in \mathbb{C})$ مزدوجة الدورية زوج الدور الإبتدائي لها هو $4K, 2iK'$

أقطابها بسيطة و هي iK' و الراسب عند هذه النقطة (و النقاط المطابقة لها) يساوي k^{-1} ،

و $2K + iK'$ و الراسب عند هذه النقطة (و النقاط المطابقة لها) يساوي $-k^{-1}$

لنفرض أن $u = 2Kz$ فنجد أن الدالة sn بالنسبة لـ z مزدوجة الدورية زوج الدور الإبتدائي لها هو $z = 2$ و $z = iK'/K := \tau$

و أقطابها بالنسبة لـ z هي $z = \tau/2$ و سيكون راسب $sn(2Kz)$ عند $\tau/2$ مساوياً لـ $1/2kK$ ، بالإضافة إلى $z = 1+(\tau/2)$ و سيكون راسب $sn(2Kz)$ عند $1+(\tau/2)$ مساوياً لـ $-1/2kK$.

و بما أن $sn(2Kz)$ دالة فردية و دورية دورها يساوي 2 فإن متسلسلة فورييه لها ستكون بالشكل: (أنظر 0.5)

$$sn(2Kz) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\pi z)$$

بشرط أن يكون $|\operatorname{Im} z| < (1/2)\operatorname{Im}\tau$. و هذا يعني أن النشر صحيح في الشريط المحدد بهذه المتراجحة ، و المعاملات b_m تعطى بالعلاقة:

$$b_m = \int_{-1}^{1} sn(2Kx)\sin(m\pi x)\,dx$$

و من أجل حساب b_m سنقوم بحساب التكامل $\int_C sn(2Kz)e^{m\pi i z} dz$ ، حيث أن C هو متوازي الأضلاع الذي رؤوسه عند النقاط $-1, 1, 2+\tau, \tau$ حيث أن $\tau = iK'/K$

نلاحظ أن الدالة $sn(2Kz)e^{m\pi i z}$ لها قطبين بسيطين داخل C و هما $\tau/2, 1+(\tau/2)$ ، كما أن:

$$\operatorname{Res}\left(sn(2Kz)e^{m\pi i z}; \tau/2\right) = q^{m/2}/2kK$$

$$\operatorname{Res}\left(sn(2Kz)e^{m\pi i z}; 1+(\tau/2)\right) = -(-1)^m q^{m/2}/2kK \qquad ; q = e^{\pi i \tau}$$

و بالتالي فإن:

$$\int_C sn(2Kz)e^{m\pi i z}dz = \left(\int_{-1}^{1} - \int_{\tau}^{2+\tau} + \int_{1}^{2+\tau} - \int_{-1}^{\tau}\right) sn(2Kz)e^{m\pi i z}dz = 2\pi i\,(sum\,of\ \ residues)$$

إلا أن: $\int_{1}^{2+\tau} sn(2Kz)e^{m\pi i z}\,dz = \int_{-1}^{\tau} sn(2Kz)e^{m\pi i z}\,dz$ ، و منه:

$$\int_C sn(2Kz)e^{m\pi i z}dz = \left(\int_{-1}^{1} - \int_{\tau}^{2+\tau}\right) sn(2Kz)e^{m\pi i z}dz = 2\pi i\left(\frac{q^{m/2}}{2kK} - \frac{(-1)^m q^{m/2}}{2kK}\right)$$

$$= 2\pi i\left[\left(1-(-1)^m\right)\frac{q^{m/2}}{2kK}\right]$$

و بالتالي فإن:

$$\left(1-(-1)^m\right)\frac{q^{m/2}}{2kK} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left[sn(2Kz)e^{m\pi i z} - sn\left(2K(z+1+\tau)\right)e^{m\pi(z+1+\tau)i}\right]dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1} sn(2Kz)e^{m\pi i z}\left(1+(-1)^m q^m\right)dz$$

$$= \frac{1+(-1)^m q^m}{2\pi i}\int_{-1}^{1} sn(2Kz)(\cos m\pi z + i\sin m\pi z)\,dz$$

$$= \frac{1+(-1)^m q^m}{2\pi}\int_{-1}^{1} sn(2Kx)\sin(m\pi x)\,dx$$

و منه: $$b_m = \frac{\pi\left(1-(-1)^m\right)q^{m/2}}{Kk\left(1+(-1)^m q^m\right)}$$

لكن عندما يكون m زوجي فإن $b_m = 0$ ، و عندما يكون $m = 2n+1$ فردياً فإن $b_m \neq 0$ ، و منه:

$$b_{2n+1} = \frac{\pi\left(1-(-1)^{2n+1}\right)q^{\frac{2n+1}{2}}}{Kk\left(1+(-1)^{2n+1}q^{2n+1}\right)} = \frac{2\pi q^{n+(1/2)}}{Kk\left(1-q^{2n+1}\right)}$$

و بالتالي:

$$sn(2Kz) = \frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+(1/2)}}{1-q^{2n+1}}\sin\left[(2n+1)\pi z\right] \quad ; \left|\operatorname{Im} z\right| < (1/2)\operatorname{Im}\tau$$

و بالمثل نجد أن:

$$cn(2Kz) = \frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+(1/2)}}{1+q^{2n+1}}\cos\left[(2n+1)\pi z\right]$$

$$dn(2Kz) = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos(2n\pi z) \qquad \text{.................. (3.36)}$$

و بما أن $z = u/2K$ فإن:

$$sn(u,k) = \frac{2\pi}{K\,k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+(1/2)}}{1-q^{2n+1}}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right)u \quad ; \left|\operatorname{Im}(u/K)\right| < \operatorname{Im}(iK'/K)$$

$$cn(u,k) = \frac{2\pi}{K\,k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+(1/2)}}{1+q^{2n+1}}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right)u \quad ; \left|\operatorname{Im}(u/K)\right| < \operatorname{Im}(iK'/K)$$

$$dn(u,k) = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos\left(\frac{n\pi}{K}\right)u \quad ; \left|\operatorname{Im}(u/K)\right| < \operatorname{Im}(iK'/K) \ \text{.........(3.37)}$$

بأخذ التبديل $u \to u+K$ في (3.37) و باستخدام العلاقات (3.16) نجد أن:

$$cd(u,k)=\frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{n+(1/2)}}{1-q^{2n+1}}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right)u$$

$$sd(u,k)=\frac{2\pi}{Kkk'}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{n+(1/2)}}{1+q^{2n+1}}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2K}\right)u$$

$$nd(u,k)=\frac{\pi}{2Kk'}+\frac{2\pi}{Kk'}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{n}}{1+q^{2n}}\cos\left(\frac{n\pi}{K}\right)u$$

و بالمثل نوجد نشر فورييه لبقية دوال جاكوبي الناقصية.

كما أنه تمت دراسة نشر فورييه للدوال $sn^m(u,k), cn^m(u,k), dn^m(u,k)$ حيث $m=2,3,...$ و إيجاد صيغ تراجعية لمعاملات هذا النشر .

(3.10) نشر تايلور لدوال جاكوبي الناقصية:

إن معاملات متسلسلة تايلور لدوال جاكوبي الناقصية $sn(u,k), cn(u,k), dn(u,k)$ في جوار u_0 ، حيث أن $u_0 \in M = \mathbb{C}\setminus\{2mK+(2n+1)iK'; m,n\in\mathbb{Z}\}$ ، لم يُعلم عنها إلا القليل ، ففي [1] و [28] لم يتم إلا إعطاء أول خمسة حدود من هذه المتسلسلة.

و في عام 1976 قام Alois Schett (أنظر [41]) بدراسة خصائص هذه المعاملات و إعطاء قيم أول خمسة عشر منها.

فبفرض أن $y_1=sn(u,k), y_2=cn(u,k), y_3=dn(u,k)$ ، و $C_1=1, C_2=-1, C_3=-k^2$

عندئذ فإن متسلسلة تايلور للدوال y_1, y_2, y_3 هي:

$$y_1(u)=sn(u,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u-u_0)^n}{n!}\left[\sum_{j_1,j_2,j_3}a_{j_1j_2j_3}C_1^{j_1}C_2^{j_2}C_3^{j_3}y_{10}^{i_1}y_{20}^{i_2}y_{30}^{i_3}\right]$$

$$y_2(u)=cn(u,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u-u_0)^n}{n!}\left[\sum_{h_1,h_2,h_3}b_{h_1h_2h_3}C_1^{h_1}C_2^{h_2}C_3^{h_3}y_{10}^{s_1}y_{20}^{s_2}y_{30}^{s_3}\right]$$

$$y_3(u)=dn(u,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u-u_0)^n}{n!}\left[\sum_{r_1,r_2,r_3}c_{r_1r_2r_3}C_1^{r_1}C_2^{r_2}C_3^{r_3}y_{10}^{q_1}y_{20}^{q_2}y_{30}^{q_3}\right]$$

حيث أن: $y_{m0}=y_m(u_0)\ ;\ m=1,2,3$ ، و j_1, j_2, j_3 تحقق العلاقة $j_1+j_2+j_3=n$.

و $a_{j_1j_2j_3}\neq 0$ إلا عندما :

$$j_1=1,2,...,J_1\ ;\ J_1=\begin{cases} n/2 & ; n\ is\ even \\ (n+1)/2 & ; n\ is\ odd\end{cases}$$

$$\begin{matrix} j_2=1,2,...,J_2 \\ j_3=1,2,...,J_3\end{matrix}\ ;\ J_2,J_3=\begin{cases} n/2 & ; n\ is\ even \\ (n-1)/2 & ; n\ is\ odd\end{cases}$$

و الأعداد i_1, i_2, i_3 نحصل عليها من العلاقات:

$$i_1=n+1-2j_1\ ,\ i_2=n-2j_2\ ,\ i_3=n-2j_3$$

و بالمثل $b_{h_1h_2h_3}\neq 0$ إلا عندما: $h_1=j_3\ ,\ h_2=j_1\ ,\ h_3=j_2$.

و الأسس s_1, s_2, s_3 ترتبط بـ h_1, h_2, h_3 بالعلاقات:

$$s_1=n-2h_1\ ,\ s_2=n+1-2h_2\ ,\ s_3=n-2h_3$$

كما أن $c_{r_1r_2r_3}\neq 0$ إلا عندما: $r_1=j_2\ ,\ r_2=j_3\ ,\ r_3=j_1$.

و الأسس r_1, r_2, r_3 ترتبط بـ q_1, q_2, q_3 بالعلاقات:

$$q_1 = n-2r_1 \ , \ q_2 = n-2r_2 \ , q_3 = n+1-2r_3$$

و من أجل حساب المعاملات في نشر تايلور للدوال y_1 , y_2 , y_3 يكفي إيجاد معاملات نشر الدالة $y_1 = sn(u,k)$ أي يكفي إيجاد $a_{j_1 j_2 j_3}$ ، لأن $a_{j_1 j_2 j_3} = b_{j_3 j_1 j_2} = c_{j_2 j_3 j_1}$.

و عندما يكون $u_0 = 0$ فإن $y_{10} = 0 \ , \ y_{20} = y_{30} = 0$

و في عام 1977 قام Alois Schett (أنظر [42]) بوضع جداول لقيم $a_{j_1 j_2 j_3}$ من أجل $n = 2,3,...,15$ مع أخذ $a_{000} = 0 \ , \ a_{100} = 1$.

و يمكننا أن نضع هذه الجداول على شكل مصفوفات نرمز لها[1] بـ A_n ، حيث $n = 2,3,...,15$.

فمثلاً :

$$A_4 = \begin{array}{c|ccc} j_2 \backslash j_3 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 14 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array} \quad ; \quad A_7 = \begin{array}{c|cccc} j_2 \backslash j_3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 135 & 408 \\ 2 & 0 & 135 & 2064 & 912 \\ 3 & 1 & 408 & 912 & 64 \end{array}$$

و $j_1 = n - j_2 - j_3$

فإذا رمزنا بـ $(a_{i\,,\,j})_n$ للعنصر في المصفوفة A_n و الواقع في السطر i و العمود j ، فإننا نجد مثلاً من أجل $n = 4$ أن: $(a_{2\,,\,2})_4 = 14 = a_{211} \ , \ (a_{1\,,\,3})_4 = 1 = a_{202}$

و في المرجع [43] قام Alois Schett أيضاً بدراسة خواص المصفوفات A_n ، حيث:

1. A_n مصفوفات مثلثية من المرتبة $(n+1)/2$ عندما n زوجي ، أو $(n+1)/2$ عندما n فردي .
2. $A_n = A_n^{\,T}$
3. مجموع عناصر A_n يساوي $n!$

و أوجَد الصيغة التراجعية $A_{n+1} = T_n \, A_n$ و التي تُمكن من حساب جميع معاملات متسلسلة تايلور لدوال جاكوبي الناقصية.

حيث أن T_n مصفوفة مثلثية عناصرها تُعطى بالشكل:

$$\left(t_{i\,,\,j\,;1} \,,\, t_{i\,,\,j\,;2} \,,\, t_{i\,,\,j\,;3}\right)_n = \left(n-2(j-1), 3+2(j-1)-n+2i \,,\, n+2-2i\right)_n$$

و عناصر المصفوفة A_{n+1} يمكن إيجادها من العلاقة :

$$(a_{i\,,\,j})_{n+1} = \left(a_{i\,,\,j-1} \cdot t_{i-1,\,j-1\,;\,1} + a_{i\,,\,j} \cdot t_{i-1,\,j-1\,;\,2} + a_{i-1,\,j} \cdot t_{i-1,\,j-1\,;\,3}\right)_n$$

فمثلاً:

$$(a_{2,4})_7 = \left(a_{2,3} \cdot t_{1\,,\,3\,;\,1} + a_{2,4} \cdot t_{1\,,\,3\,;\,2} + a_{1,4} \cdot t_{1\,,\,3\,;\,3}\right)_6 = (135)(2) + (44)(3) + (1)(6) = 408$$

حيث أن:

$$n = 6 \Rightarrow t_{1\,,\,3;1} = n-2(j-1) = 6-2(3-1) = 2$$

$$t_{1\,,\,3;2} = 3+2(j-1)-n+2i = 3+2(3-1)-6+2(1) = 3$$

$$t_{1\,,\,3;3} = n+2-2i = 6+2-2(1) = 6$$

و بالمثل نجد: $(a_{3,4})_7 = 912 \ , \ (a_{4,4})_7 = 64 \ , \ (a_{3\,,\,3})_7 = 2064$

[1] A_n لا تعني مصفوفة مربعة من المرتبة n .

(3.11) صيغ كارلسون:[9]،[8]

يعتبر Bill C.Carlson في الوقت الحاضر أحد أكثر الباحثين في نظرية التكاملات و الدوال الناقصية ، فمنذ عام 1963 و حتى الوقت الحاضر قام كارلسون بنشر العديد من الأبحاث و المقالات التي أغنت هذه النظرية ، و في عام 2004 و 2006 قام كارلسون باختصار عدد الصيغ لـ

$\left(ab(u)\right)' = ab'$, $ab^2(u/2,k)$, $ab(2u,k)$, $ab(u_1+u_2,k)$, $(ab')^2$, ab'', $\int ab(u)du$,.... حيث

أن $a,b \in \{s,c,d,n\}$ و $a \neq b$.

ضمن ثلاث صيغ فقط حيث أن.

الصيغة الأولى للدوال التي تبدأ بحرف s أي للدوال sp حيث $p \in \{c,d,n\}$. (sc, sd, sn)

الصيغة الثانية للدوال التي تنتهي بحرف s أي للدوال ps حيث $p \in \{c,d,n\}$. (cs, ds, ns)

الصيغة الثالثة للدوال التي لا يوجد فيها الحرف s أي للدوال pq حيث $p,q \in \{c,d,n\}$ و $p \neq q$ ، و هي عبارة عن الدوال الست التالية (cd, cn, dn, dc, nc, nd) .

و بعمله هذا تمكن من تخفيض العدد الكبير للصيغ التي تحققها دوال جاكوبي الناقصية ، على الشكل التالي:

لنفرض أن دوال جاكوبي الناقصية تتبع لـ $u \in \mathbb{C}$ و بوضع:

$$\Delta(p,q) = ps^2 - qs^2 \quad ; \; p,q \in \{c,d,n\} \, , \; p \neq q$$

ومنه:

$$\Delta(n,c) = -\Delta(c,n) = 1 \, , \; \Delta(n,d) = -\Delta(d,n) = k^2 \, , \; \Delta(d,c) = -\Delta(c,d) = k'^2 = 1 - k^2$$

لأن: $ns^2 - cs^2 = 1 \; , \; ns^2 - ds^2 = k^2 \; , \; ds^2 - cs^2 = k'^2$

و لتكن $p,q,r \in \{c,d,n\}$ بحيث $p \neq q \neq r$. عندئذ فإن:

$$(1) \quad sp' = (qp)(rp)$$

$$ps' = -(qs)(rs)$$

$$pq' = \Delta(p,q)(rq)(sq)$$

$$(2) \quad ps^2(u/2,k) = (ps+qs)(ps+rs) = (ps)^2(1+qp)(1+rq)$$

$$sp^2(u/2,k) = \frac{(ps-qs)(ps-rs)}{\Delta(p,q)\,\Delta(p,q)} = \frac{(sp)^2}{(1+qp)(1+rp)}$$

$$pq^2(u/2,k) = \frac{ps+rs}{qs+rs} = \frac{(ps+rs)(qs-rs)}{\Delta(q,r)} = \frac{pq+rq}{1+rq} = \frac{pr+1}{qr+1}$$

$$(3) \quad ps(2u,k) = \frac{(ps)^4 - \Delta(p,q)\Delta(p,r)}{2(ps)(qs)(rs)} = \frac{1 - \Delta(p,q)\Delta(p,r)(sp)^4}{2(sp)(qp)(rp)}$$

$$sp(2u,k) = 1/ps(2u,k)$$

$$pq(2u,k) = \frac{(ps)^4 - \Delta(p,q)\Delta(p,r)}{(qs)^4 - \Delta(q,p)\Delta(q,r)} = \frac{(pq)^4 - \Delta(p,q)\Delta(p,r)(sq)^4}{1 - \Delta(q,p)\Delta(q,r)(sq)^4}$$

(4) صيغ الإضافة: لنضع $ab_j = ab(u_j,k)$; $j = 1,2$ و $a,b \in \{s,c,d,n\}$ بحيث $a \neq b$.

$$ps(u_1+u_2,k) = \frac{ps_1 qs_2 rs_2 - ps_2 qs_1 rs_1}{ps_2^{\,2} - ps_1^{\,2}} = \frac{ps_1^{\,2} ps_2^{\,2} - \Delta(p,q)\Delta(p,r)}{ps_1 qs_2 rs_2 + ps_2 qs_1 rs_1}$$

$$sp(u_1+u_2,k) = \frac{sp_1^{\,2} - sp_2^{\,2}}{sp_1 qp_2 rp_2 - sp_2 qp_1 rp_1} = \frac{sp_1 qp_2 rp_2 + sp_2 qp_1 rp_1}{1 - \Delta(p,q)\Delta(p,r) sp_1^{\,2} sp_2^{\,2}}$$

$$pq(u_1+u_2,k)=\frac{ps_1\,qs_1\,ps_2\,qs_2+\Delta(p,q)rs_1\,rs_2}{qs_1{}^2\,qs_2{}^2+\Delta(p,q)\Delta(q,r)}=\frac{pq_1\,pq_2+\Delta(p,q)sq_1\,rq_1\,sq_2\,rq_2}{1-\Delta(p,q)\Delta(p,r)sq_1{}^2\,sq_2{}^2}$$

(5) $$(ps')^2=(ps^2+\Delta(q,p))(ps^2+\Delta(r,p))$$
$$(sp')^2=(\Delta(q,p)\cdot sp^2+1)(\Delta(r,p)\cdot sp^2+1)$$
$$(pq')^2=(\Delta(r,p)\cdot pq^2+\Delta(p,r))(pq^2-1)$$

(6) $$ps''=2ps^3+(\Delta(p,q)+\Delta(r,p))\cdot ps$$
$$sp''=2\Delta(q,p)\Delta(r,p)\cdot sp^3+(\Delta(q,p)+\Delta(r,p))\cdot sp$$
$$pq''=+\Delta(r,q)\cdot pq^3+(\Delta(p,r)+\Delta(q,r))\cdot pq$$

(7) $$\int ps\,du=\frac{1}{2}\ln\frac{rs-qs}{rs+qs}=\ln(qs-rs)$$
$$\int sp\,du=\frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}}\ln(\sqrt{\alpha}\,qp+\sqrt{\gamma}\,rp)$$
$$\int pq\,du=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\ln(rq+\sqrt{\beta}\,sq)\qquad;\alpha=\Delta(r,p),\beta=\Delta(r,q),\gamma=\Delta(q,p)$$

" الفصل الرابع"

الدوال ثيتا
Theta Functions

كان للدوال ثيتا في القرن التاسع عشر الدور الأساسي لدى الرياضيين في دراسة الدوال الناقصية ، وتظهر هذه الدوال في سياق آخر باسم المتسلسلات ثيتا . وقد وُجد أول مثال لهذه المتسلسلات في أوراق جاكوب برنولي (Jakob Bernoulli 1654 – 1705)، وكان لأولر إهتمام بهذه المتسلسلات ومن إنجازاته في هذا المجال إثبات الصيغة التالية في عام 1705 والتي تدعى بصيغة أولر للأعداد المُخمّسة (Euler's formulae for the pentagonal numbers).

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^{n}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n}x^{n(3n+1)/2}\quad ;\quad |x|<1$$ أنظر (4.10.4)

كما أن بواسون (S.D.poisson 1781- 1840) وفورييه تمكنا من الوصول إلى الدوال ثيتا عند حل معادلة الانتشار أو الحرارة(heat or diffusion equation) . أنظر (4.1.7)

ويعتبر جاكوبي أول من درس هذه الدوال بشكل معمق بين العامين (1829-1838) وكانت هذه الدوال أداته الأساسية في عمله في نظرية الدوال الناقصية.

و في هذا الفصل تم الاعتماد على المراجع التالية: 49 ,48 ,47 ,46 ,45 ,44 ,36 ,30 ,16 ,10 ,6 ,3

(4.1) منشأ وتعريف الدوال ثيتا: [3]

ظهرت الدوال ثيتا أيضاً بشكل أساسي عند محاولة كتابة دوال جاكوبي الناقصية $sn(u),cn(u),dn(u)$ بالشكل $f(u)=g(z)/h(z)$ حيث أن $z=\pi u/2K$

وبحيث تكون الدوال $h(z)$ ، $g(z)$ دوال صحيحة (entire) ، والدالة $h(z)$ هي نفسها من أجل الدوال الناقصية الثلاث السابقة .

بما أن الدوال $sn(u),cn(u),dn(u)$ مزدوجة الدورية بالنسبة لـ u ، أدوارها على الترتيب بالشكل:

$$(4K,2iK')\ ,\ (4K,2K+2iK')\ ,\ (2K,4iK')$$

وبفرض أن $\tau=iK'/K$ و $q=e^{\pi i\tau}=e^{-\pi K'/K}$ ، فإن الدوال $sn(z),cn(z),dn(z)$ مزدوجة الدورية بالنسبة لـ z أدوارها على الترتيب بالشكل:

$$(2\pi,\pi\tau),(2\pi,\pi+\pi\tau),(\pi,2\pi\tau)$$

وبالتالي يجب أن تكون الدالة $h(z)$ دورية دورها يساوي π وأصفارها هي أقطاب الدوال sn,cn,dn. أي:

$$u\equiv iK'(\bmod 2K,2iK')\Leftrightarrow z\equiv\pm(2n-1)\left(\pi\tau/2\right)(\bmod\pi)\ ;\ n=1,2,3,...$$

إن الدالة $1-q^{2n-1}e^{-2iz}$ دورية دورها يساوي π وأصفارها بسيطة هي:

$$z\equiv(2n-1)\left(\pi\tau/2\right)(\bmod\pi)\quad ;\ n=1,2,...$$

والدالة $1-q^{2n-1}e^{2iz}$ أيضاً دورية دورها يساوي π وأصفارها بسيطة هي:

$$z \equiv -(2n-1)\left(\pi\tau/2\right)(\bmod \pi) \quad ; \quad n=1,2,...$$

وبأخذ:

$$h(z)=G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}e^{-2iz}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}e^{2iz}\right) \qquad .... \quad (4.1)$$

حيث أن $G=G(q)$ هو ثابت يتبع لـ q فقط سنعينه لاحقاً ، نجد أنه بما أن $|q|<1$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}q^{2n-1}e^{\pm 2iz}$ متقاربة بالإطلاق من أجل كل $z\in\mathbb{C}$ ، وبانتظام في كل مجموعة متراصة جزئية من $\mathbb{C}$

ومنه فإن الدالة $h(z)$ صحيحة ، دورية دورها يساوي π وأصفارها بسيطة هي :

$$z \equiv \mp(2n-1)\left(\pi\tau/2\right)(\bmod \pi) \; ; n=1,2,... \Leftrightarrow u \equiv iK'(\bmod 2K, 2iK')$$

و هي الأقطاب المشتركة لدوال جاكوبي الناقصية $dn(u), cn(u), sn(u)$.

ويمكننا الآن كتابة $h(z)$ بالشكل :

$$h(z)=G\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{-2iz})(1-q^{2n-1}e^{2iz})=G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}\right)$$

لدينا $h(z+\pi)=h(z)$ ، كما أن $h(z+\pi\tau)=-q^{-1}e^{-2iz}h(z)$

ندعو 1 و $-q^{-1}e^{-2iz}$ بعوامل الدورية (periodicity factors) للدالة h المرتبطة بالأدوار π ، $\pi\tau$ على الترتيب .

لنضع الآن $dn(u)=g_3(z)/h(z)$ ، و الدالة $g_3(z)$ يجب أن تكون دورية دورها يساوي π وتنعدم عندما $z\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}(\bmod \pi,\pi\tau)$ ، أي $u\equiv K+iK'(\bmod 2K, 2iK')$ ، أي عندما تنعدم $dn(u)$.

من أجل ذلك سنأخذ الدالة $g_3(z)$ بالشكل $g_3(z):=h\left(z-(\pi/2)\right)=h\left(z+(\pi/2)\right)$ ، فنجد أن :

$$g_3(z+\pi)=g_3(z) \; , \; g_3(z+\pi\tau)=q^{-1}e^{-2iz}g_3(z)$$

أي أن عوامل الدورية للدالة $g_3(z)$ المرتبطة بالأدوار π ، $\pi\tau$ هي على الترتيب 1 ، $q^{-1}e^{-2iz}$

بأخذ $F_3(z)=g_3(z)/h(z)$ نجد أن:

$$F_3(z+\pi)=F_3(z) \; , \; F_3(z+2\pi\tau)=F_3(z)$$

أي أن الدالة $F_3(z)$ هي دالة ميرومورفية ، مزدوجة الدورية ، أدوارها $\pi, 2\pi\tau$ مقابلة لأدوار الدالة $dn(u)$ $2K, 4iK'$ ، أصفارها بسيطة هي $z\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}(\bmod \pi,\pi\tau)$ ، أي $u\equiv K+iK'(\bmod 2K, 2iK')$

و هي الأصفار البسيطة لـ $dn(u)$.

وأقطاب $F_3(z)$ بسيطة هي $z\equiv\pi\tau/2(\bmod \pi,\pi\tau)$ ،أي $u\equiv iK'(\bmod 2K, 2iK')$ وهذه هي الأقطاب البسيطة لـ $dn(u)$.

و بذلك يصبح لدينا $F_3(z)$ و $dn(u)$ كل منهما دالة مزدوجة الدورية لهما نفس الأدوار والأصفار والأقطاب ومن نفس المراتب ، و بالتالي فإن الدالة $dn(u)/F_3(z)$ هي دالة صحيحة مزدوجة الدورية .

وحسب مبرهنة ليوفيل ستكون ثابتة . أي يوجد ثابت D بحيث $dn(u)=DF_3(z)$.

و منه $dn(u)=D\,g_3(z)/h(z)$.

وبالمثل إذا وضعنا $sn(u)=g_1(z)/h(z)$ و $cn(u)=g_2(z)/h(z)$

بأخذ $g_1(z)$ بالشكل $g_1(z):=-iq^{1/4}e^{iz}h\left(z+(\pi\tau/2)\right)$ و $g_2(z)$ بالشكل $g_2(z):=g_1\left(z+(\pi/2)\right)$

نجد أن:

$$g_1(z+2\pi)=g_1(z) \; , \; g_1(z+\pi\tau)=-q^{-1}e^{-2iz}g_1(z)$$

$$g_2(z+2\pi)=g_2(z) \; , \; g_2(z+\pi\tau)=q^{-1}e^{-2iz}g_2(z)$$

و $g_1(z)$ تنعدم عندما $z \equiv 0 (\bmod \pi, \pi\tau) \Leftrightarrow u \equiv 0 (\bmod 2K, 2iK')$ ، أي عندما تنعدم $sn(u)$
و $g_2(z)$ تنعدم عندما $z \equiv \pi/2 (\bmod \pi, \pi\tau) \Leftrightarrow u \equiv K (\bmod 2K, 2iK')$ ، أي عندما تنعدم $cn(u)$
وبمناقشة مماثلة لما سبق (من أجل $dn(u)$) نجد أنه يوجد S و C ثابتين بحيث:

$$sn(u) = S\, g_1(z)/h(z) \quad , \quad cn(u) = C\, g_2(z)/h(z)$$

(4.1.1) تعريف الدوال ثيتا:

سنعرف هذه الدوال من أجل كل $z \in \mathbb{C}$ و $q = e^{\pi i \tau}$ ، حيث أن $\tau = iK'/K$ ، أي $|q| < 1$.
وهي كما سنرى دوال صحيحة (تحليلية على كامل المستوي العقدي $\mathbb{C}$).

أولاً: الدالة $\theta_4(z)$:

تعَرف هذه الدالة بالشكل:

$$\theta_4(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz} \qquad .... \ (4.2)$$

والمتسلسلة في (4.2) متقاربة بالإطلاق وبانتظام في كل مجموعة متراصة جزئية من $\mathbb{C}$ ، ومنه $\theta_4(z)$ دالة صحيحة. كما أن:

$$\theta_4(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{-n} q^{n^2} e^{-2niz}$$

$$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nz) \qquad .... \ (4.3)$$

ومنه فإن الدالة $\theta_4(z)$ زوجية ، وعوامل الدورية المرتبطة بالأدوار π و $\pi\tau$ هي على الترتيب 1 و $-q^{-1}e^{-2iz}$.
لذلك فإننا ندعو الدالة $\theta_4(z)$ بالدالة شبه مزدوجة الدورية (quasidoubly-periodic function)

ثانياً: الدوال $\theta_1(z), \theta_2(z), \theta_3(z)$:

تُعرّف هذه الدوال بالشكل التالي :

$$\theta_1(z) := -iq^{1/4} e^{iz} \theta_4\left(z + (\pi\tau/2)\right)$$

$$\theta_2(z) := \theta_1\left(z + (\pi/2)\right)$$

$$\theta_3(z) := \theta_4\left(z + (\pi/2)\right) \qquad .... \ (4.4)$$

وهي دوال صحيحة في $\mathbb{C}$ ، كما أن :

$$\theta_1(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+(1/2))^2} \sin(2n+1)z \qquad .... \ (4.5)$$

$$\theta_2(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+(1/2))^2} \cos(2n+1)z \qquad .... \ (4.6)$$

$$\theta_3(z) = 1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nz \qquad .... \ (4.7)$$

والدالة $\theta_1(z)$ هي دالة فردية ، أما بقية الدوال $\theta_2(z), \theta_3(z)$ فهي دوال زوجية.
بالإعتماد على التعاريف (4.4) وتعريف الدالة $\theta_4(z)$ نجد أن:

$$\theta_1(z) = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+(1/2))^2} e^{(2n+1)iz}, \theta_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+(1/2))^2} e^{(2n+1)iz}, \theta_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz}$$

وعوامل الدورية للدوال $\theta_1(z),\theta_2(z),\theta_3(z),\theta_4(z)$ المرتبطة بالأدوار $\pi\tau,\pi$ موضحة في الجدول التالي:

	$\theta_1(z)$	$\theta_2(z)$	$\theta_3(z)$	$\theta_4(z)$
π	-1	-1	1	1
$\pi\tau$	$-N$	N	N	$-N$

حيث أن $N=q^{-1}e^{-2iz}$ ، و الدوال ثيتا تدعى بالدوال شبه مزدوجة الدورية.
وبالاستقراء نجد أن:

$$\theta_1(z+n\pi+m\pi\tau|\tau)=(-1)^{m+n}e^{-im^2\pi\tau}e^{-2miz}\theta_1(z|\tau)$$
$$\theta_2(z+n\pi+m\pi\tau|\tau)=(-1)^{n}e^{-im^2\pi\tau}e^{-2miz}\theta_2(z|\tau)$$
$$\theta_3(z+n\pi+m\pi\tau|\tau)=e^{-im^2\pi\tau}e^{-2miz}\theta_3(z|\tau)$$
$$\theta_4(z+n\pi+m\pi\tau|\tau)=(-1)^{m}e^{-im^2\pi\tau}e^{-2miz}\theta_4(z|\tau)\quad;\ \forall m,n\in\mathbb{Z}^*$$

(4.1.2) توطئة:

إن: $$\frac{\theta_j'(z+\pi)}{\theta_j(z+\pi)}=\frac{\theta_j'(z)}{\theta_j(z)}\quad,\quad\frac{\theta_j'(z+\pi\tau)}{\theta_j(z+\pi\tau)}=-2i+\frac{\theta_j'(z)}{\theta_j(z)}$$

حيث $\theta_j'(z)=(d/dz)\theta_j(z)$ ، و $j=1,2,3,4$

(4.1.3) أصفار الدوال ثيتا:

من الواضح أنه إذا كان $z_0\in\mathbb{C}$ صفراً لأي دالة من الدوال ثيتا فإن $z_0+m\pi+n\pi\tau$ أصفاراً لها أيضاً، حيث أن $m,n\in\mathbb{Z}$. ومن الواضح أن $z=0$ صفراً للدالة $\theta_1(z)$ (نعوض في 4.5) وبالتالي فإن:

$$z\equiv 0(\mathrm{mod}\,\pi,\pi\tau)$$
$$z\equiv\pi/2(\mathrm{mod}\,\pi,\pi\tau)$$
$$z\equiv\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}(\mathrm{mod}\,\pi,\pi\tau)$$
$$z\equiv\pi\tau/2(\mathrm{mod}\,\pi,\pi\tau)\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4.8)$$

هي أصفار الدوال $\theta_4(z),\theta_3(z),\theta_2(z),\theta_1(z)$ على الترتيب .

وسنبين الآن أنه لا يوجد للدوال ثيتا أي صفر آخر غير الأصفار (4.8). أي سنبين أنه إذا كانت P_b أي خلية في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ رؤوسها عند النقاط $b\,,b+\pi\,,b+\pi+\pi\tau\,,b+\pi\tau$ ، فإن الدالة $\theta(z)$ ، حيث $\theta(z)$ تشير إلى أي دالة من الدوال ثيتا، تملك صفراً واحداً فقط داخل P_b ، و ذلك $\forall b\in\mathbb{C}$.

بما أن $\theta(z)$ دالة صحيحة ، فإنه حسب المبرهنة (0.4.4) سيكون عدد أصفار $\theta(z)$ داخل P_b مساوياً لـ :

$$N=(1/2\pi i)\int_{P_b}\theta'(z)/\theta(z)\,dz$$

ومنه: $$N=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_b^{b+\pi}+\int_{b+\pi}^{b+\pi+\pi\tau}-\int_{b+\pi\tau}^{b+\pi+\pi\tau}-\int_b^{b+\pi\tau}\right]\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}dz$$

إلا أن:

$$\int_{b+\pi\tau}^{b+\pi+\pi\tau}\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}dz=\int_b^{b+\pi}\frac{\theta'(z+\pi\tau)}{\theta(z+\pi\tau)}dz\quad,\quad\int_{b+\pi}^{b+\pi+\pi\tau}\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}dz=\int_b^{b+\pi\tau}\frac{\theta'(z+\pi\tau)}{\theta(z+\pi\tau)}dz$$

وبالتالي فإن :

$$N = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{b}^{b+\pi}\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}-\frac{\theta'(z+\pi\tau)}{\theta(z+\pi\tau)}\,dz-\int_{b}^{b+\pi\tau}\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}-\frac{\theta'(z+\pi\tau)}{\theta(z+\pi\tau)}\,dz\right]$$

وبالاعتماد على التوطئة (4.1.2) نجد أن:

$$N = (1/2\pi i)\int_{b}^{b+\pi} 2i\,dz = 1$$

(4.1.4) كتابة الدوال ثيتا على شكل جداءات غير منتهية:

سنبرهن أولاً أن: $\theta_4(z) = h(z) = G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}e^{-2iz}\right)\left(1-q^{2n-1}e^{2iz}\right)$

لنضع $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}e^{-2iz}\right)\left(1-q^{2n-1}e^{2iz}\right)$

إن الدالة $f(z)$ هي دالة صحيحة، لأن الجداءات $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}e^{\mp 2iz}\right)$ متقاربة بالإطلاق وبانتظام في كل مجموعة متراصة جزئية من $\mathbb{C}$.

وأصفار $f(z)$ بسيطة هي:

$$z \equiv \mp(2n-1)(\pi\tau/2)(\operatorname{mod}\pi); n=1,2,\ldots \Leftrightarrow z \equiv (\pi\tau/2)(\operatorname{mod}\pi,\pi\tau)$$

أي أن لـ $f(z)$ و $\theta_4(z)$ نفس الأصفار، ومنه فإن الدالة $\theta_4(z)/f(z) \neq 0$، وليس لها أقطاب في أي جزء محدود من المستوي العقدي $\mathbb{C}$، وهي دالة مزدوجة الدورية (مجموعة أدوارها $m\pi+n\pi\tau$ ، $m,n\in\mathbb{Z}$) لأن $f(z+\pi)=f(z)$ و $f(z+\pi\tau)=-q^{-1}e^{-2iz}f(z)$.

وبالتالي حسب مبرهنة ليوفيل يوجد ثابت وليكن G بحيث $\theta_4(z)=Gf(z)$. أي:

$$\theta_4(z) = h(z) = G\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{-2iz})(1-q^{2n-1}e^{2iz}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.9)$$

$$= G\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2})$$

وسنرى لاحقاً أن $G = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$.

ومن التعاريف (4.4) نجد أن:

$$\theta_3(z) = G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}e^{-2iz}\right)\left(1+q^{2n-1}e^{2iz}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.10)$$

$$= G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.11)$$

$$\theta_1(z) = 2G\,q^{1/4}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}e^{-2iz}\right)\left(1-q^{2n}e^{2iz}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.12)$$

$$= 2G\,q^{1/4}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.13)$$

$$\theta_2(z) = 2G\,q^{1/4}\cos z\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}e^{-2iz})(1+q^{2n}e^{2iz}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.14)$$

$$= 2G\,q^{1/4}\cos z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.15)$$

(4.1.5) ملاحظة:

بما أن $h(z)=\theta_4(z)$ ، كما أن:

$$g_1(z)=-iq^{1/4}e^{iz}\theta_4\left(z+(\pi\tau/2)\right)\ ,\ g_2(z)=g_1\left(z+(\pi/2)\right)\ ,\ g_3(z)=\theta_4\left(z+(\pi/2)\right)$$

فإنه من تعريف الدوال $\theta_3(z),\theta_2(z),\theta_1(z)$ نجد أن:

$$dn(u)=D\ \theta_3(z)/\theta_4(z) \qquad \text{.................} \quad (4.16)$$

$$sn(u)=S\ \theta_1(z)/\theta_4(z) \qquad \text{..................} \quad (4.17)$$

$$cn(u)=C\ \theta_2(z)/\theta_4(z) \qquad \text{..................} \quad (4.18)$$

حيث أن $u=2Kz/\pi$.

(4.1.6) تعيين الثوابت S,C,D:

لتحديد D نضع $u=0$ في (4.16) فنجد أن: $D=\theta_4(0)/\theta_3(0)>0$

و بوضع $u=K$ نجد أن:

$$k'=dn(K)=D\ \theta_3(\pi/2)/\theta_4(\pi/2)=D\ \theta_4(0)/\theta_3(0)=D^2$$

ومنه : $D=\sqrt{k'}$. و بالتالي: $dn(u)=\sqrt{k'}\,\theta_3(z)/\theta_4(z)$

ومن أجل تحديد S. لدينا $\theta_1(z):=-iq^{1/4}e^{iz}\theta_4\left(z+(\pi\tau/2)\right)$. ومنه فإن:

$$\theta_1\left(z+(\pi\tau/2)\right)=iq^{-1/4}e^{-iz}\theta_4(z)$$

لكن: $\theta_4\left(z+(\pi\tau/2)\right)=iq^{-1/4}e^{-iz}\theta_1(z)$ ، و منه فإن:

$$\frac{\theta_1\left(z+(\pi\tau/2)\right)}{\theta_4\left(z+(\pi\tau/2)\right)}=\frac{\theta_4(z)}{\theta_1(z)} \qquad \text{..................} \quad (4.19)$$

لنضع $u=K$ في (4.17) فنجد أن: $1=S\ \theta_1(\pi/2)/\theta_4(\pi/2)=S\ \theta_2(0)/\theta_3(0)$

أي أن: $S=\theta_3(0)/\theta_2(0)>0$. و بوضع $u=K+iK'$ في (4.17) ، و من (4.19) نجد أن:

$$k^{-1}=sn(u+iK')=S\ \frac{\theta_1\left((\pi/2)+(\pi\tau/2)\right)}{\theta_4\left((\pi/2)+(\pi\tau/2)\right)}=S\ \frac{\theta_4(\pi/2)}{\theta_1(\pi/2)}=S\ \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}=S^2$$

ومنه: $S=\sqrt{k^{-1}}$. و بالتالي: $sn(u)=\sqrt{k^{-1}}\ \theta_1(z)/\theta_4(z)$

ومن أجل تحديد C. نضع $u=0$ في (4.18) فيكون: $C=\theta_4(0)/\theta_2(0)>0$

ومنه : $C=\dfrac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)}=\dfrac{D}{1/S}=\sqrt{k'}.\sqrt{k^{-1}}=\sqrt{k'k^{-1}}$

وبالتالي فإن: $cn(u)=\sqrt{k'k^{-1}}\ \theta_2(z)/\theta_4(z)$

(4.1.7) المعادلة التفاضلية التي تحققها الدوال ثيتا:

إذا كانت $\theta(z|\tau)$ تشير إلى أي دالة من الدوال ثيتا وباعتبارها دالة بمتغيرين مستقلين z و τ ، وبما أن الدالة $\theta(z|\tau)$ صحيحة فإنه يمكننا أن نشتق متسلسلة $\theta(z|\tau)$ بالنسبة لـ z و τ أي عدد من المرات.

فمثلاً باعتبار أن $\theta_3(z|\tau)$ دالة بالمتغيرين المستقلين z,τ نجد أن:

$$\frac{\partial\theta_3(z|\tau)}{\partial z}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(2ni)q^{n^2}e^{2niz}\ \Rightarrow\ \frac{\partial^2\theta_3(z|\tau)}{\partial z^2}=-4\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n^2q^{n^2}e^{2niz}$$

$$\frac{\partial\theta_3(z|\tau)}{\partial\tau}=\pi i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n^2q^{n^2}e^{2niz}$$

وبالتالي فإن: $\frac{\partial^2\theta_3(z|\tau)}{\partial z^2}=\frac{-4}{\pi i}\frac{\partial\theta_3(z|\tau)}{\partial\tau}$

ومنه فإن الدالة $\theta_3(z|\tau)$ تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$\frac{1}{4}\pi i\,\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}+\frac{\partial y}{\partial\tau}=0\quad ;y=y(z,\tau)\qquad .... \circledast$$

وبنفس الطريقة نثبت أن بقية الدوال ثيتا تحقق المعادلة التفاضلية ⊛

وبأخذ $t=-i\,\tau$ (حيث أن $0<t$ عندما $0<k<1$) نجد أن: $\partial y/\partial t=i\;\partial y/\partial\tau$

والمعادلة ⊛ تصبح بالشكل : $\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\pi}{4}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$

وهذه المعادلة تسمى معادلة الانتشار (أو الحرارة)- diffusion (or heat) equation- .

(4.1.8) ملخص لأهم العلاقات التي تحققها الدوال ثيتا:

من أجل الإختصار في الترميز سنكتب $\theta_j(z)$ حيث $j=1,2,3,4$ بدلاً من $\theta_j(z|\tau)$، و إذا كان هناك ضرورة للتأكيد على الوسيط τ فنكتب $\theta_j(z|\tau)$، وإذا كانت هناك ضرورة للتأكيد على q نكتب $\theta_j(z,q)$.

كما أنه سنكتب $\theta_j=\theta_j(0)$ حيث أن $j=2,3,4$.

و $\theta_1'=\theta_1'(0)=\lim_{z\to 0}\left(\theta_1(z)/z\right)$.

وسيكون لدينا:

$$sn(u)=\sqrt{k^{-1}}\,\theta_1(z)/\theta_4(z)\qquad .... \quad (4.20)$$

$$cn(u)=\sqrt{k'k^{-1}}\,\theta_2(z)/\theta_4(z)\qquad .... \quad (4.21)$$

$$dn(u)=\sqrt{k'}\,\theta_3(z)/\theta_4(z)\qquad .... \quad (4.22)$$

حيث أن:

$$z=\pi u/2K\ ,\ \sqrt{k}=\theta_2/\theta_3\ ,\ \sqrt{k'}=\theta_4/\theta_3\qquad .... \quad (4.23)$$

كما أن:

$$\theta_1'=2G\,q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)^2=2q^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{n(n+1)}$$

$$\theta_2=2G\,q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n}\right)^2=2q^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}$$

$$\theta_3=G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}\right)^2=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}$$

$$\theta_4=G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)^2=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\qquad .... \quad (4.24)$$

وبما أن $k^2+k'^2=1$ ، فإنه من (4.23) نجد أن: $\left(\theta_2^4/\theta_3^4\right)+\left(\theta_4^4/\theta_3^4\right)=1$ ، أي:

$$\theta_3^4=\theta_2^4+\theta_4^4\qquad .... \quad (4.25)$$

و المطابقة (4.25) تعود لجاكوبي في عام 1829 .

وباستخدام العلاقات (4.24) ، و بما أن $G^4\neq 0$ نجد أن:

$$\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)\right\}^8+16q\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n}\right)\right\}^8=\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}\right)\right\}^8$$

⊛نعلم أن $sn^2u+cn^2u=1$ ، و منه باستخدام العلاقات (4.20)،(4.21)،(4.23) نجد:

$$\theta_4^2\,\theta_2^2(z)=\theta_2^2\,\theta_4^2(z)-\theta_3^2\,\theta_1^2(z)\qquad .... \quad (4.26)$$

وبما أن: $dn^2u + k^2sn^2u = 1$ ، فباستخدام (4.20) ، (4.22) ، (4.23) نجد أن:

$$\theta_4^2\,\theta_3^2(z) = \theta_3^2\,\theta_4^2(z) - \theta_2^2\,\theta_1^2(z) \qquad .... \quad (4.27)$$

بأخذ التبديل $z \to z + (\pi/2)$ في (4.26) نجد أن:

$$\theta_4^2\,\theta_1^2(z) = \theta_2^2\,\theta_3^2(z) - \theta_3^2\,\theta_2^2(z) \qquad .... \quad (4.28)$$

وبأخذ التبديل $z \to z + (\pi/2)$ في (4.27) نجد أن:

$$\theta_4^2\,\theta_4^2(z) = \theta_3^2\theta_3^2(z) - \theta_2^2\theta_2^2(z) \qquad .... \quad (4.29)$$

كما أن :

$$\theta_3(z,q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2niz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{(2n)^2} e^{2(2n)iz} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{(2n+1)^2} e^{2(2n+1)iz}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{4n^2} e^{2ni(2z)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{4\left(n+(1/2)\right)^2} e^{(2n+1)i(2z)} = \theta_3(2z,q^4) + \theta_2(2z,q^4)$$

أي:

$$\theta_3(z,q) = \theta_3(2z,q^4) + \theta_2(2z,q^4) \qquad .... \quad (4.30)$$

وبالمثل نجد أن :

$$\theta_4(z,q) = \theta_3(2z,q^4) - \theta_2(2z,q^4) \qquad .... \quad (4.31)$$

و بسهولة يمكننا التأكد من أن:

$$\theta_1(z) = -\theta_2\left(z + (\pi/2)\right) = -iM\,\theta_3\left(z + (\pi/2) + (\pi\tau/2)\right) = -iM\,\theta_4\left(z + (\pi\tau/2)\right)$$

$$\theta_2(z) = M\,\theta_3\left(z + (\pi\tau/2)\right) = M\,\theta_4\left(z + (\pi/2) + (\pi\tau/2)\right) = \theta_1\left(z + (\pi/2)\right)$$

$$\theta_3(z) = \theta_4\left(z + (\pi/2)\right) = M\,\theta_1\left(z + (\pi/2) + (\pi\tau/2)\right) = M\,\theta_2\left(z + (\pi\tau/2)\right)$$

$$\theta_4(z) = -iM\,\theta_1\left(z + (\pi\tau/2)\right) = iM\,\theta_2\left(z + (\pi/2) + (\pi\tau/2)\right) = \theta_3\left(z + (\pi/2)\right) \quad ....(4.32)$$

حيث أن: $M = q^{1/4}e^{iz}$ ، $\tau = iK'/K$ ، $q = e^{\pi i\tau}$.

⊛ سنثبت الآن صحة بعض العلاقات والتي ستفيدنا بشكل أساسي في (4.5) [أي في تحويل لاندن]

لنثبت أولاً أن:

$$\theta_3(z|\tau) + \theta_4(z|\tau) = 2\theta_3(2z|4\tau) \qquad .... \quad (4.33)$$

أي: $\theta_3(z,q) + \theta_4(z,q) = 2\theta_3(2z,q^4)$. في الحقيقة لدينا:

$$\theta_3(z|\tau) + \theta_4(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(q^{n^2}e^{2niz} + (-1)^n q^{n^2}e^{2niz}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(q^{(2n)^2}e^{2(2n)iz} + (-1)^{2n} q^{(2n)^2}e^{2(2n)iz}\right)$$

$$= 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(q^4\right)^{n^2} e^{2ni(2z)} = 2\theta_3(2z,q^4) = 2\theta_3(2z|4\tau)$$

وبنفس الأسلوب نثبت أن:

$$\theta_3(z|\tau) - \theta_4(z|\tau) = 2\theta_2(2z|4\tau) \qquad .... \quad (4.34)$$

كما أن:

$$\theta_3^2(0|\tau) - \theta_4^2(0|\tau) = 2\theta_2^2(0|2\tau) \qquad .... \quad (4.35)$$

$$\theta_3^2(0|\tau) + \theta_4^2(0|\tau) = 2\theta_3^2(0|2\tau) \qquad .... \quad (4.36)$$

في الحقيقة من أجل (4.35) نضرب العلاقتين (4.33) و (4.34) طرفاً إلى طرف فنجد أن:

$$\theta_3^2(z|\tau) - \theta_4^2(z|\tau) = 4\theta_3(2z|4\tau)\theta_2(2z|4\tau)$$

وبأخذ $z = 0$ نجد أن:

$$\theta_3^2(0|\tau) - \theta_4^2(0|\tau) = 4\theta_3(0|4\tau)\theta_2(0|4\tau) = 4\theta_3(0,q^4)\theta_4(0,q^4)$$

$$= 4\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{8n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{8n-4}\right)^2(2q)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{8n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{8n}\right)^2$$

$$= 8q\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{8n}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left((1+q^{4(2n)}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{4(2n-1)}\right)^2$$

$$= 8q\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-q^{4n}\right)\left(1+q^{4n}\right)\right]^2\left(1+q^{4n}\right)^2$$

$$= 8q\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{4n}\right)^2\left(1+q^{4n}\right)^4 = 2\theta_2^{\,2}\left(0,q^2\right) = 2\theta_2^{\,2}\left(0|2\tau\right)$$

أي: $\theta_3^{\,2}(0|\tau) - \theta_4^{\,2}(0|\tau) = 2\theta_2^{\,2}(0|2\tau)$

ولإثبات العلاقة (4.36) يجب أولاً أن نثبت:

$$\theta_3(0|\tau)\theta_4(0|\tau) = \theta_4^{\,2}(0|2\tau) \qquad .... \quad (4.37)$$

لدينا:

$$\theta_3(0|\tau)\theta_4(0|\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)^2\left(1+q^{2n-1}\right)^2\left(1-q^{2n-1}\right)^2$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)^2\left(1-q^{4n-2}\right)^2 = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{4n}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{4n-2}\right)^4$$

$$= \theta_4^{\,2}\left(0|2\tau\right)$$

وبالتالي من أجل(4.36) ، لدينا:

$$\left[\theta_3^{\,2}\left(0|\tau\right)+\theta_4^{\,2}\left(0|\tau\right)\right]^2 = \left[\theta_3^{\,2}\left(0|\tau\right)-\theta_4^{\,2}\left(0|\tau\right)\right]^2 + 4\theta_3^{\,2}\left(0|\tau\right)\theta_4^{\,2}\left(0|\tau\right)$$

بالاستفادة من (4.35) و (4.37) ومطابقة جاكوبي $\theta_3^{\,4} = \theta_2^{\,4} + \theta_4^{\,4}$. نجد أن:

$$\left[\theta_3^{\,2}\left(0|\tau\right)+\theta_4^{\,2}\left(0|\tau\right)\right]^2 = 4\left[\theta_2^{\,4}\left(0|2\tau\right)+\theta_4^{\,4}\left(0|2\tau\right)\right] = \left(2\theta_3^{\,2}\left(0|2\tau\right)\right)^2$$

وبالتالي فإن: $\theta_3^{\,2}\left(0|\tau\right)+\theta_4^{\,2}\left(0|\tau\right) = 2\theta_3^{\,2}\left(0|2\tau\right)$

لنثبت الآن أن :

$$\theta_2^{\,2}\left(0|\tau\right) = 2\theta_2\left(0|2\tau\right)\theta_3\left(0|2\tau\right) \qquad .... \quad (4.38)$$

بضرب العلاقتين (4.35) ، (4.36) طرفاً إلى طرف ، و بما أن $\theta_3^{\,4} = \theta_2^{\,4} + \theta_4^{\,4}$ نجد أن:

$$\theta_2^4\left(0|\tau\right) = 4\theta_2^2\left(0|2\tau\right)\theta_3^2\left(0|2\tau\right)$$

وبالتالي: $\theta_2^2\left(0|\tau\right) = 2\theta_2\left(0|2\tau\right)\theta_3\left(0|2\tau\right)$. وهذا هو المطلوب إثباته.

(4.2) صيغ شبه الإضافة للدوال ثيتا:

في هذه الفقرة سنوجد $\theta_j^{\,2}\theta_r(z_1+z_2)\theta_r(z_1-z_2)$ ، حيث أن $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ، $r = 1,2,3,4$ ، $j = 2,3,4$ بدلالة الدوال $\theta_s(z_2), \theta_s(z_1)$ ، حيث $s = 1,2,3,4$

لدينا:

$$\forall u,v \in \mathbb{C}\ ;\ cn(u+v)cn(u-v) = \frac{cn^2u - sn^2v\, dn^2u}{1-k^2sn^2u\, sn^2v} \qquad .... \quad (4.39)$$

بوضع : $z_1 = \pi u/2K$, $z_2 = \pi v/2K$ ، وبفرض $u+v = w$ ، و $w = 2Kz/\pi$. نجد أن:

$$cn(u+v) = C\,\theta_2(z_1+z_2)/\theta_4(z_1+z_2) \quad ;\ C = \theta_4/\theta_2$$

و بفرض $u - v = \Omega$ ، و $\Omega = 2K\upsilon/\pi$. نجد أن:

$$cn(u - v) = C\,\theta_2(z_1 - z_2)/\theta_4(z_1 - z_2)$$

بالتعويض في (4.39) نجد أن:

$$C^2\,\frac{\theta_2(z_1+z_2)\theta_2(z_1-z_2)}{\theta_4(z_1+z_2)\theta_4(z_1-z_2)} = \frac{C^2\theta_2^2(z_1)\theta_4^2(z_2) - S^2D^2\theta_1^2(z_2)\theta_3^2(z_1)}{\theta_4^2(z_1)\theta_4^2(z_2) - k^2S^4\theta_1^2(z_1)\theta_1^2(z_2)}$$

حيث: $D = \theta_4/\theta_3 = \sqrt{k'}\ ,\ S = \theta_3/\theta_2 = 1/\sqrt{k}$.

ومنه:

$$\frac{\theta_4^2(z_1)\theta_4^2(z_2) - \theta_1^2(z_1)\theta_1^2(z_2)}{\theta_4(z_1+z_2)\theta_4(z_1-z_2)} = \frac{\theta_2^2(z_1)\theta_4^2(z_2) - \theta_1^2(z_2)\theta_3^2(z_1)}{\theta_2(z_1+z_2)\theta_2(z_1-z_2)} \qquad \text{.............} \quad (4.40)$$

لنُثبّت z_2 في (4.40) ولنضع:

$$f(z_1) = \frac{\theta_4^2(z_1)\theta_4^2(z_2) - \theta_1^2(z_1)\theta_1^2(z_2)}{\theta_4(z_1+z_2)\theta_4(z_1-z_2)} = \frac{\theta_2^2(z_1)\theta_4^2(z_2) - \theta_3^2(z_1)\theta_1^2(z_2)}{\theta_2(z_1+z_2)\theta_2(z_1-z_2)}$$

نلاحظ أن: $f(z_1+\pi) = f(z_1)\ ,\ f(z_1+\pi\tau) = f(z_1)$.

وبالتالي فإن الدالة $f(z_1)$ مزدوجة الدورية ، النقاط الشاذة لها هي عبارة عن أقطاب عند النقاط التي تحقق:

$$\text{(A)}\quad \theta_4(z_1+z_2) = 0 \qquad \text{or} \qquad \text{(B)}\quad \theta_4(z_1-z_2) = 0$$

وبآن واحد مع:

$$\text{(C)}\quad \theta_2(z_1+z_2) = 0 \qquad \text{or} \qquad \text{(D)}\quad \theta_2(z_1-z_2) = 0$$

لكن (A) و (B) لا يمكن أن تتحققان بآن واحد (معاً) ، وكذلك الأمر بالنسبة لـ(C) و (D) لا يمكن أن تتحققان معاً. وبملاحظة أنه إذا كان $\theta_4(z_1+z_2) = 0$ فإنه يجب أن يكون $\theta_2(z_1-z_2) = 0$ ، فإن أقطاب الدالة $f(z_1)$ تحقق:

$$z_1 + z_2 \equiv \pi\tau/2\left(\operatorname{mod}\pi, \pi\tau\right)\ \ \&\ \ z_1 - z_2 \equiv \pi/2\left(\operatorname{mod}\pi, \pi\tau\right)$$

أي أن: $z_1 \equiv \left((\pi/4) + (\pi\tau/4)\right)\left(\operatorname{mod}\pi, \pi\tau\right)$

وكذلك سنحصل أيضاً على نفس الأقطاب إذا كان $\theta_4(z_1-z_2) = 0$ ،لأنه في هذه الحالة سيكون $\theta_2(z_1+z_2) = 0$ ، وسيكون $z_1 \equiv \left((\pi/4) + (\pi\tau/4)\right)\left(\operatorname{mod}\pi, \pi\tau\right)$.

ومنه فإن الدالة f ستملك قطباً بسيطاً واحداً على الأكثر داخل كل متوازي أضلاع دور (زوج الدور الابتدائي هو $\pi\tau, \pi$).

وبالتالي فإنه حسب النتيجة (2.3.8) نجد أن الدالة f ستكون ثابتة. أي أن $f(z_1) = c$ ، بأخذ $z_1 = 0$ نجد أن:

$$c = f(z_1) \equiv f(0) = \theta_4^2$$

ومنه نستنتج أن:

$$\theta_4^2\theta_4(z_1+z_2)\theta_4(z_1-z_2) = \theta_4^2(z_1)\theta_4^2(z_2) - \theta_1^2(z_1)\theta_1^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.41)$$

$$\theta_4^2\theta_2(z_1+z_2)\theta_2(z_1-z_2) = \theta_2^2(z_1)\theta_4^2(z_2) - \theta_3^2(z_1)\theta_1^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.42)$$

بأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi/2)\ ,\ z_2 \to z_2 + (\pi/2)$ في (4.42) نجد:

$$\theta_4^2\theta_2(z_1+z_2)\theta_2(z_1-z_2) = \theta_4^2(z_1)\theta_2^2(z_2) - \theta_1^2(z_1)\theta_3^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.43)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi/2)\ ,\ z_2 \to z_2 + (\pi/2)$ في (4.41) نجد:

$$\theta_4^2\theta_4(z_1+z_2)\theta_4(z_1-z_2) = \theta_3^2(z_1)\theta_3^2(z_2) - \theta_2^2(z_1)\theta_2^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.44)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi/2)$ في (4.43) نجد أن:

$$\theta_4^2\theta_1(z_1+z_2)\theta_1(z_1-z_2) = \theta_3^2(z_1)\theta_2^2(z_2) - \theta_2^2(z_1)\theta_3^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.45)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi/2)\ ,\ z_2 \to z_2 + (\pi/2)$ في (4.45) نجد أن:

$$\theta_4^2\theta_1(z_1+z_2)\theta_1(z_1-z_2) = \theta_1^2(z_1)\theta_4^2(z_2) - \theta_4^2(z_1)\theta_1^2(z_2)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi/2)$ في(4.44) نجد أن:

$$\theta_4^2\theta_3(z_1+z_2)\theta_3(z_1-z_2) = \theta_4^2(z_1)\theta_3^2(z_2) - \theta_1^2(z_1)\theta_2^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.46)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi/2)\ ,\ z_2 \to z_2 + (\pi/2)$ في (4.46) نجد أن:

$$\theta_4^2\theta_3(z_1+z_2)\theta_3(z_1-z_2) = \theta_3^2(z_1)\theta_4^2(z_2) - \theta_2^2(z_1)\theta_1^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.47)$$

ومن العلاقات (4.41) ، (4.26) ، (4.27) نجد أن:

$$\theta_2^2\theta_4(z_1+z_2)\theta_4(z_1-z_2) = \theta_4^2(z_1)\theta_2^2(z_2) + \theta_3^2(z_1)\theta_1^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.48)$$

$$= \theta_2^2(z_1)\theta_4^2(z_2) + \theta_1^2(z_1)\theta_3^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.49)$$

وبالمثل من العلاقات (4.41) ، (4.26) ، (4.27) نجد أن:

$$\theta_3^2\theta_4(z_1+z_2)\theta_4(z_1-z_2) = \theta_4^2(z_1)\theta_3^2(z_2) + \theta_2^2(z_1)\theta_1^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.50)$$

$$= \theta_3^2(z_1)\theta_4^2(z_2) + \theta_1^2(z_1)\theta_2^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.51)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi/2)$ في (4.48) و (4.49) نجد أن:

$$\theta_2^2\theta_3(z_1+z_2)\theta_3(z_1-z_2) = \theta_3^2(z_1)\theta_2^2(z_2) + \theta_4^2(z_1)\theta_1^2(z_2)$$
$$= \theta_1^2(z_1)\theta_4^2(z_2) + \theta_2^2(z_1)\theta_3^2(z_2)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi/2)$ في (4.50) و (4.51) نجد أن:

$$\theta_3^2\theta_3(z_1+z_2)\theta_3(z_1-z_2) = \theta_3^2(z_1)\theta_3^2(z_2) + \theta_1^2(z_1)\theta_1^2(z_2)$$
$$= \theta_4^2(z_1)\theta_4^2(z_2) + \theta_2^2(z_1)\theta_2^2(z_2)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi\tau/2)$ في (4.48) ومن العلاقات (4.32) نجد أن:

$$\theta_2^2\theta_1(z_1+z_2)\theta_1(z_1-z_2) = \theta_1^2(z_1)\theta_2^2(z_2) - \theta_2^2(z_1)\theta_1^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.52)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi\tau/2)$ في (4.49) ومن العلاقات (4.32) نجد أن:

$$\theta_2^2\theta_1(z_1+z_2)\theta_1(z_1-z_2) = \theta_4^2(z_1)\theta_3^2(z_2) - \theta_3^2(z_1)\theta_4^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.53)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi/2)$ في (4.52) و (4.53) نجد أن:

$$\theta_2^2\theta_2(z_1+z_2)\theta_2(z_1-z_2) = \theta_2^2(z_1)\theta_2^2(z_2) - \theta_1^2(z_1)\theta_1^2(z_2)$$
$$= \theta_3^2(z_1)\theta_3^2(z_2) - \theta_4^2(z_1)\theta_4^2(z_2)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi\tau/2)$ في (4.49) ومن العلاقات (4.32) نجد أن:

$$\theta_3^2\theta_1(z_1+z_2)\theta_1(z_1-z_2) = \theta_1^2(z_1)\theta_3^2(z_2) - \theta_3^2(z_1)\theta_1^2(z_2) \qquad \text{.............} \quad (4.54)$$

وبأخذ التبديل $z_1 \to z_1 + (\pi/2)$ في (4.54) نجد أن:

$$\theta_3^2\theta_2(z_1+z_2)\theta_2(z_1-z_2) = \theta_2^2(z_1)\theta_3^2(z_2) - \theta_4^2(z_1)\theta_1^2(z_2)$$

وبهذا الشكل نكون قد توصلنا إلى إيجاد الصيغ لـ :

$$\forall z_1, z_2 : \theta_j^2\theta_r(z_1+z_2)\theta_r(z_1-z_2) \quad ; \ r = 1,2,3 \ \ j = 2,3,4$$

(4.3) تعيين الثابت G:

لدينا: $$\theta_4(z) = G\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}e^{-2iz}\right)\left(1-q^{2n-1}e^{2iz}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz$$

بأخذ نهاية الطرفين عندما $q \to 0$. حيث أن الجداء في الطرف الأيسر والمجموع في الطرف الأيمن كل منهما متقارب بالإطلاق وبانتظام في كل مجموعة متراصة جزئية من $\mathbb{C}$. نجد أن: $\lim\limits_{q\to 0} G = 1$

وجدنا سابقاً أن: $sn(u) = \left(1/\sqrt{k}\right)\theta_1(z)/\theta_4(z)$ ، حيث $u = 2Kz/\pi$ ، و $k^{1/2} = \theta_2/\theta_3$.

بتقسيم الطرفين على $u \neq 0$ نجد أن: $sn(u)/u = \left(k^{-1/2}/u\right)\left(\theta_1(z)/\theta_4(z)\right)$

وعندما $u \to 0$ نجد أن:

$$\lim_{u\to 0}\frac{sn(u)}{u}=1=\frac{k^{-1/2}\pi}{2K\theta_4}\lim_{z\to 0}\frac{\theta_1(z)}{z}=\frac{k^{-1/2}\pi}{2K\theta_4}\theta_1'(0)$$

أي أن: $1=k^{-1/2}\left(\pi/2K\right)\left(\theta_1'/\theta_4\right)$.

ومنه: $\frac{2K}{\pi}=\frac{\theta_3\theta_1'}{\theta_2\theta_4}=\frac{\theta_1'}{\theta_2\theta_3\theta_4}\theta_3^2$

وبوضع $\alpha=\alpha(q):=\theta_1'/\theta_2\theta_3\theta_4$ نجد أن: $2K/\pi=\alpha(q)\theta_3^2$.

لكن لدينا من (4.24) ، $\theta_1'=2Gq^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)^2$. أي أن:

$$\begin{aligned}\theta_1'&=2Gq^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^n\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n\right)^2\\&=2Gq^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)^2\end{aligned}$$

كما أنه من (4.24) نجد أن:

$$\theta_2\theta_3\theta_4=2G^3q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)^2$$

وبالتالي فإن: $\alpha(q)=\frac{\theta_1'}{\theta_2\theta_3\theta_4}=\frac{1}{G^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)^2$.

و منه فإن: $\lim_{q\to 0}\alpha(q)=1$ ، كما أن $\alpha(q)\neq 0$ مهما كانت q بحيث $|q|<1$ ، و بالتالي فإن:

$$G=A(q)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right) \qquad .... \quad (4.55)$$

حيث أن: $A(q)=1/\sqrt{\alpha(q)}$.

(4.3.1) مبرهنة:

إن $A(q)=1$

(4.3.2) نتيجة:

نستنتج من المبرهنة السابقة أن $\alpha(q)=1$. وبالتالي: $\theta_1'=\theta_2\theta_3\theta_4$ ، وتدعى هذه المطابقة بمطابقة جاكوبي (Jacobi identity) ، كما أنه نستنتج من المبرهنة أن $G=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)$ ، وأن $\theta_3^2=2K/\pi$.

ومن (4.23) نجد أن:

$$\begin{aligned}\theta_4^2(0,q)&=k'\theta_3^2(0,q)\Rightarrow\theta_4^2=2k'K/\pi\\\theta_2^2(0,q)&=k\,\theta_3^2(0,q)\Rightarrow\theta_2^2=2k\,K/\pi\end{aligned}$$

(4.4) تحويل جاكوبي التخيلي للدوال ثيتا:

نلاحظ بداية أنه عندما $0<k<1$ فإن التبديل $k\to k'$ يحول $\tau=iK'/K$ إلى $\tau'=iK/K'=-\tau^{-1}$.

في هذه الفقرة سنوجد العلاقة بين $\theta_j(z|\tau)$ و $\theta_j(\tau'z|\tau')$ ، من أجل $j=1,2,3,4$.

نعلم أنه مهما كان $w\in\mathbb{C}$ فإن: $dn(iw,k)=dn(w,k')/cn(w,k')$

وأن:

$$cn(w,k)=\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{\theta_2\left((\pi w/2K)|\tau\right)}{\theta_4\left((\pi w/2K)|\tau\right)}\Rightarrow cn(w,k')=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\frac{\theta_2\left((\pi w/2K')|\tau'\right)}{\theta_4\left((\pi w/2K')|\tau'\right)}$$

$$dn(w,k)=\sqrt{k'}\frac{\theta_3\left((\pi w/2K)|\tau\right)}{\theta_4\left((\pi w/2K)|\tau\right)}\Rightarrow dn(w,k')=\sqrt{k}\frac{\theta_3\left((\pi w/2K')|\tau'\right)}{\theta_4\left((\pi w/2K')|\tau'\right)}$$

وبالتالي فإن:

$$\sqrt{k'}\frac{\theta_3\left((\pi iw/2K)|\tau\right)}{\theta_4\left((\pi iw/2K)|\tau\right)}=\sqrt{k'}\frac{\theta_3\left((\pi w/2K')|\tau'\right)}{\theta_2\left((\pi w/2K')|\tau'\right)} \qquad .... (4.56)$$

بوضع $z=\pi iw/2K$ نجد أن:

$$\pi w/2K'=\pi iwK/2iKK'=-\tau' z$$

ومنه فإن (4.56) تصبح بالشكل: $\theta_3(z|\tau)/\theta_4(z|\tau)=\theta_3(\tau' z|\tau')/\theta_2(\tau' z|\tau')$

أو:

$$\frac{\theta_3(z|\tau)}{\theta_3(\tau' z|\tau')}=\frac{\theta_4(z|\tau)}{\theta_2(\tau' z|\tau')}:=F(z) \qquad .... (4.57)$$

إن الدالة $F(z)$ هي دالة زوجية ، صحيحة لأنه إذا كان لـها نقاط شاذة فإن هذه النقاط ستكون أصفار $\theta_2(\tau' z|\tau')$ و $\theta_3(\tau' z|\tau')$ بآن واحد، إلا أنه إذا كان $\theta_2(z)=0$ فإن $\theta_3(z)\neq 0$ ، كما أنه إذا كان $\theta_3(z)=0$ فإن $\theta_2(z)\neq 0$ لأن أصفار $\theta_2(z)$ و $\theta_3(z)$ منفصلة مثنى مثنى.وبالتالي فإنه ليس لـ $F(z)$ نقاط شاذة . و بما أن أصفار $\theta_4(z)$ و $\theta_3(z)$ منفصلة مثنى مثنى فإنه ليس لـ $F(z)$ أصفار.

كما أن: $F(z+\pi)=\dfrac{\theta_3(z+\pi|\tau)}{\theta_3(\tau' z+\pi\tau'|\tau')}=\dfrac{\theta_3(z|\tau)}{\theta_3(\tau' z+\pi\tau'|\tau')}$

لكن: $\theta_3(z+\pi\tau|\tau)=q^{-1}e^{-2iz}\theta_3(z|\tau)=e^{-i(\pi\tau+2z)}\theta_3(z|\tau)$

وبأخذ التبديل $k\to k'$ نجد أن: $\theta_3(z+\pi\tau'|\tau')=e^{-i(\pi\tau'+2z)}\theta_3(z|\tau')$

ومنه: $\theta_3(\tau' z+\pi\tau'|\tau')=e^{-i\tau'(\pi+2z)}\theta_3(\tau' z|\tau')$

وبالتالي فإن:

$$F(z+\pi)=e^{i\tau'(\pi+2z)}F(z) \qquad .... (4.58)$$

و نجد أيضاً أن: $F(z+\pi\tau)=\theta_3(z+\pi\tau|\tau)/\theta_3(\tau' z-\pi|\tau')$ ، حيث أن $\tau\tau'=-1$.

إلا أن: $\theta_3(z-\pi|\tau)=\theta_3(z|\tau)$ ، ومنه $\theta_3(\tau' z-\pi|\tau')=\theta_3(\tau' z|\tau')$. وبذلك نجد أن:

$$F(z+\pi\tau)=e^{-i(\pi\tau+2z)}F(z) \qquad .... (4.59)$$

كما أننا سنحصل على نفس النتائج إذا أخذنا $F(z)=\theta_4(z|\tau)/\theta_2(\tau' z|\tau')$.

إن الدالة $f(z)=e^{az^2}\neq 0$ ، حيث $a\in\mathbb{C}$ ، هي دالة زوجية ، صحيحة ، تحقق:

$$\forall b\in\mathbb{C}\,;\ f(z+b)=e^{a(z+b)^2}=e^{ab(2z+b)}f(z) \qquad .... (4.60)$$

ونلاحظ أنه عندما $b=\pi$ فإن (4.58) تتشابه مع (4.60) إذا كان $ab=i\tau'$ ، أي $a\pi=i\tau'$.

و أنه عندما $b=\pi\tau$ فإن (4.59) تتشابه مع (4.60) إذا كان $ab=-i$ ، أي $a\pi=i\tau'$.

وبالتالي فإنه بأخذ $a=i\tau'/\pi=1/\pi i\tau$ ، فإن:

$$f(z)=e^{az^2}=e^{z^2/\pi i\tau}=e^{(-i\tau^{-1}/\pi)z^2}=e^{(i\tau'/\pi)z^2}$$

وسيكون لدينا:

$$f(z+\pi)=e^{i\tau'(2z+\pi)}f(z)\ ,\ f(z+\pi\tau)=e^{-i(2z+\pi\tau)}f(z)$$

وبأخذ النسبة $F(z)/f(z)$ نجد أن:

$$h(z):=\frac{F(z)}{f(z)}=\frac{e^{-z^2/\pi i\tau}\theta_3(z|\tau)}{\theta_3(\tau' z|\tau')}=\frac{e^{-z^2/\pi i\tau}\theta_4(z|\tau)}{\theta_2(\tau' z|\tau')}$$

ومنه: $h(z+\pi)=h(z+\pi\tau)=h(z)$. أي أن $h(z)$ مزدوجة الدورية.

وبما أن $f(z)\neq 0$ $(\forall z\in\mathbb{C})$ ، و $F(z)$ دالة صحيحة فإن الدالة $h(z)$ دالة صحيحة وبالتالي حسب ليوفيل نجد أنها ثابتة أي $h(z)=c$ حيث c ثابت.

بأخذ $z=0$ و من النتيجة (4.3.2) نجد أن: $h(0)=\frac{(2K/\pi)^{1/2}}{(2K'/\pi)^{1/2}}=(-i\tau)^{-1/2}$

وبالتالي $h(z)=(-i\tau)^{-1/2}$ أي:

$$\theta_3(z|\tau)=(-i\tau)^{-1/2}e^{z^2/\pi i\tau}\theta_3(\tau' z|\tau') \qquad .... (4.61)$$

$$\theta_4(z|\tau)=(-i\tau)^{-1/2}e^{z^2/\pi i\tau}\theta_2(\tau' z|\tau') \qquad .... (4.62)$$

وبأخذ التبديل $z\to z+(\pi\tau/2)$ في (4.61) ، و من العلاقات (4.32) ، وبما أن:

$$\theta_3(\tau' z+(\pi\tau\tau'/2)|\tau')=\theta_3(\tau' z-(\pi/2)|\tau')=\theta_3(-\tau' z+(\pi/2)|\tau')=\theta_4(\tau' z|\tau')$$

و $\theta_3(z+(\pi\tau/2)|\tau)=q^{-1/2}e^{-iz}\theta_2(z|\tau)=e^{-\pi i\tau/4}e^{-iz}\theta_2(z|\tau)$

نجد أن:

$$\theta_2(z|\tau)=(-i\tau)^{-1/2}e^{z^2/\pi i\tau}\theta_4(\tau' z|\tau') \qquad .... (4.63)$$

وبأخذ التبديل $z\to z+(\pi\tau/2)$ في (4.62) ، و من (4.32)، و بما أن:

$$\theta_4(z+(\pi\tau/2)|\tau)=ie^{-\pi i\tau/4}e^{-iz}\theta_1(z|\tau) \quad , \quad \theta_3(\tau' z+(\pi\tau\tau'/2)|\tau')=\theta_1(\tau' z|\tau')$$

نجد أن:

$$\theta_1(z|\tau)=-i\,(-i\tau)^{-1/2}e^{z^2/\pi i\tau}\theta_1(\tau' z|\tau') \qquad .... (4.64)$$

ومن المناسب في كثير من الأحيان أن نكتب الصيغ (4.61) ، (4.62) ، (4.63) ، (4.64) بالشكل التالي:

$$\theta_1\left((z/\tau)|-\tau^{-1}\right)=-i\,(-i\tau)^{1/2}e^{-z^2/\pi i\tau}\theta_1(z|\tau) \qquad .... (4.64)'$$

$$\theta_2\left((z/\tau)|-\tau^{-1}\right)=(-i\tau)^{1/2}e^{-z^2/\pi i\tau}\theta_4(z|\tau) \qquad .... (4.62)'$$

$$\theta_3\left((z/\tau)|-\tau^{-1}\right)=(-i\tau)^{1/2}e^{-z^2/\pi i\tau}\theta_3(z|\tau) \qquad .... (4.61)'$$

$$\theta_4\left((z/\tau)|-\tau^{-1}\right)=(-i\tau)^{1/2}e^{-z^2/\pi i\tau}\theta_2(z|\tau) \qquad .... (4.63)'$$

وبالنسبة لـ $(4.61)'$ فقد تم في عام 2007 تقديم إثبات جديد لها عن طريق نظرية الرواسب وذلك مهما يكن $\tau\in\mathbb{C}$ بحيث $\operatorname{Im}\tau>0$. أنظر [49] .

(4.5) تحويل لاندن: Landen transformation .

إن تحويل لاندن للدوال ثيتا هو عبارة عن التحويل من τ إلى $\tau_1=2\tau$. وبالتالي فإن المقاس k المرتبط بـ τ سيتحول إلى المقاس k_1 المرتبط بـ τ_1 . وبذلك سنتمكن من إيجاد صيغ للدوال $\theta_j(2z|2\tau)$ $(j=1,2,3,4)$.

وبما أن $k=\theta_2^2(0|\tau)/\theta_3^2(0|\tau)$ فإنه بالمقابل سيكون $k_1=\theta_2^2(0|2\tau)/\theta_3^2(0|2\tau)$.

لكن من (4.35) و (4.36) نجد أن:

$$k_1=\frac{\theta_3^2(0|\tau)-\theta_4^2(0|\tau)}{\theta_3^2(0|\tau)+\theta_4^2(0|\tau)}=\frac{1-k'}{1+k'} \quad ; k'=\sqrt{1-k^2}$$

سنبين الآن أن:

$$\frac{\theta_3(z|\tau)\theta_4(z|\tau)}{\theta_4(2z|2\tau)}=\frac{\theta_3(0|\tau)\theta_4(0|\tau)}{\theta_4(0|2\tau)} \qquad .... \quad (4.65)$$

إن أصفار الدالة $\theta_3(z|\tau)\theta_4(z|\tau)$ هي أصفار بسيطة عند النقاط:

$$z\equiv \pi\tau/2 (\bmod \pi,\pi\tau) \ \ \& \ \ z\equiv\left((\pi/2)+(\pi\tau/2)\right)(\bmod \pi,\pi\tau)$$

أي عند النقاط : $2z=m\pi+(2n+1)\pi\tau\ ; m,n\in\mathbb{Z}$ ، والتي هي أصفار الدالة $\theta_4(2z|2\tau)$.

وبهذا نجد أن الدالة $f(z):=\theta_3(z|\tau)\theta_4(z|\tau)/\theta_4(2z|2\tau)$ ليس لها أصفار ولا أقطاب

كما أن: $f(z+\pi)=f(z)\ ,\ f(z+\pi\tau)=f(z)$

وبالتالي فإن الدالة $f(z)$ هي دالة صحيحة(entire) ، مزدوجة الدورية وحسب مبرهنة ليوفيل نجد أن $f(z)=c$ حيث c ثابت . بأخذ $z=0$ نجد المطلوب.

وبأخذ التبديل $z\to z+(\pi\tau/2)$ في (4.65) ومن العلاقات (4.32) نجد أن:

$$\frac{\theta_3\left(z+(\pi\tau/2)|\tau\right)\theta_4\left(z+(\pi\tau/2)|\tau\right)}{\theta_4\left(2z+\pi\tau|2\tau\right)}=\frac{\theta_2(z|\tau)\theta_1(z|\tau)}{\theta_1\left(2z|2\tau\right)}$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{\theta_2(z|\tau)\theta_1(z|\tau)}{\theta_1\left(2z|2\tau\right)}=\frac{\theta_3(0|\tau)\theta_4(0|\tau)}{\theta_4(0|2\tau)} \qquad .... \quad (4.66)$$

وبملاحظة أن: $\theta_4(0|2\tau)/\theta_3(0|\tau)\theta_4(0|\tau)=1/\theta_4(0|2\tau)$.

فإنه يمكننا إعادة كتابة العلاقات (4.65)، (4.66) بالشكل:

$$\theta_4\left(2z|2\tau\right)=\theta_3(z|\tau)\theta_4(z|\tau)/\theta_4(0|2\tau) \qquad .... \quad (4.65)'$$

$$\theta_1\left(2z|2\tau\right)=\theta_1(z|\tau)\theta_2(z|\tau)/\theta_4(0|2\tau) \qquad .... \quad (4.66)'$$

الآن بضرب طرفي (4.33) و (4.34) طرفاً إلى طرف نجد أن:

$$\theta_3^2(z|\tau)-\theta_4^2(z|\tau)=4\theta_2(2z|4\tau)\theta_3(2z|4\tau)=4\theta_2(2z,q^4)\theta_3(2z,q^4)$$

$$=8q\cos 2z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{8n}\right)^2\left(1+q^{8n}e^{-4iz}\right)\left(1+q^{8n}e^{4iz}\right)\left(1+q^{8n-4}e^{-4iz}\right)\left(1+q^{8n-4}e^{4iz}\right)$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{\theta_3^2(z|\tau)-\theta_4^2(z|\tau)}{2\theta_2(0|2\tau)}=\frac{2q^{1/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{8n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{4n}e^{-4iz}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{4n}e^{4iz}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{4n}\right)}$$

$$=2q^{1/2}\cos 2z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{4n}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{4n}e^{-4iz}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{4n}e^{4iz}\right)$$

$$=\theta_2(2z|2\tau)$$

أي أن:

$$\theta_2(2z|2\tau)=\frac{\theta_3^2(z|\tau)-\theta_4^2(z|\tau)}{2\theta_2(0|2\tau)} \qquad .... \quad (4.67)$$

وبأخذ التبديل $z\to z+(\pi\tau/2)$ في (4.67) نجد أن:

$$\theta_2\left(2z+\pi\tau|2\tau\right)=\frac{\theta_3^2(z+(\pi\tau/2)|\tau)-\theta_4^2(z+(\pi\tau/2)|\tau)}{2\theta_2(0|2\tau)}$$

لكن: $\theta_2\left(2z+\pi\tau|2\tau\right)=e^{-2\pi i\tau/4}e^{-2iz}\theta_3(2z|2\tau)=q^{-1/2}e^{-2iz}\theta_3(2z|2\tau)$ ، و منه:

$$q^{-1/2}e^{-2iz}\theta_3(2z|2\tau)=\frac{\theta_3^2(z+(\pi\tau/2)|\tau)-\theta_4^2(z+(\pi\tau/2)|\tau)}{2\theta_2(0|2\tau)}$$
$$=\frac{q^{-1/2}e^{-2iz}\theta_2^2(z|\tau)+q^{-1/2}e^{-2iz}\theta_1^2(z|\tau)}{2\theta_2(0|2\tau)}$$

بتقسيم الطرفين على $q^{-1/2}e^{-2iz}\neq 0$ نجد أن:

$$\theta_3(2z|2\tau)=\frac{\theta_1^2(z|\tau)+\theta_2^2(z|\tau)}{2\theta_2(0|2\tau)} \qquad .... (4.68)$$

من (4.65) و (4.66) يمكننا أن نكتب:

$$\frac{\theta_1(z|\tau)\theta_2(z|\tau)}{\theta_3(z|\tau)\theta_4(z|\tau)}=\frac{\theta_1(2z|2\tau)}{\theta_4(2z|2\tau)} \qquad .... (4.69)$$

وبفرض أن $\tau_1=2\tau$ و أن k_1 هو المقاس المرتبط بـ τ_1 وأن Λ,Λ' هي أرباع الأدوار المرتبطة بـ τ وبما أن:

$$sn\left((2K/\pi)z,k\right)=k^{-1/2}\,\theta_1(z|\tau)/\theta_4(z|\tau)$$
$$cn\left((2K/\pi)z,k\right)=k'^{1/2}k^{-1/2}\,\theta_2(z|\tau)/\theta_4(z|\tau)$$
$$dn\left((2K/\pi)z,k\right)=k'^{1/2}\,\theta_3(z|\tau)/\theta_4(z|\tau)$$

فإن:

$$\frac{\theta_1(z|\tau)\theta_2(z|\tau)}{\theta_3(z|\tau)\theta_4(z|\tau)}=k\;sn\left(2Kz/\pi,k\right)cd\left(2Kz/\pi,k\right) \qquad .... (4.70)$$

كما أن: $sn\left(2\Lambda(2z)/\pi,k_1\right)=k_1^{-1/2}\,\theta_1(2z|\tau_1)/\theta_4(2z|\tau_1)$. وبالتالي:

$$\theta_1(2z|2\tau)/\theta_4(2z|2\tau)=k_1^{1/2}sn\left(4\Lambda z/\pi,k_1\right) \qquad .... (4.71)$$

نعوض (4.70) و (4.71) في (4.69) فنجد أن:

$$k\;sn\left(2Kz/\pi,k\right)cd\left(2Kz/\pi,k\right)=k_1^{1/2}sn\left(4\Lambda z/\pi,k_1\right) \qquad .... (4.72)$$

بتقسيم طرفي (4.72) على z وأخذ نهاية الطرفين عندما $z\to 0$ نجد أن $\Lambda=(1+k')K/2$.

وبالتالي فإن (4.72) تصبح بالشكل:

$$k\;sn\left(2Kz/\pi,k\right)cd\left(2Kz/\pi,k\right)=k_1^{1/2}sn\left(2z(1+k')K/\pi,k_1\right)$$

وبأخذ $2Kz/\pi=u$ و $u_1=(1+k')u$. نجد أن:

$$sn(u_1,k_1)=(1+k')sn(u,k)cd(u,k) \qquad .... (4.73)$$

ومنه:

$$cn(u_1,k_1)=\left(1-(1+k')sn^2(u,k)\right)nd(u,k)$$
$$dn(u_1,k_1)=\left(k'+(1+k')cn^2(u,k)\right)nd(u,k)$$

(4.6) المعادلات التفاضلية التي تحققها الدوال $\theta_j(z)/\theta_4(z)$ حيث $j=1,2,3$:

أولاً لنبرهن أن:

$$\frac{d}{dz}\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}=\theta_4^2\frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}\frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)} \qquad .... (4.75)$$

لتكن الدوال:

$$f_1(z):=\theta_1(z)/\theta_4(z)\;,\;f_2(z):=f_1'(z)\;,\;f_3(z):=\theta_2(z)\theta_3(z)/\theta_4^2(z)$$

إن عوامل الدورية للدوال f_1,f_2,f_3 المرتبطة بالأدوار π و $\pi\tau$ هي على الترتيب $1,-1$.

وبالتالي إذا عرفنا الدالة $\phi(z)$ بالشكل:

$$\phi(z):=\frac{f_2(z)}{f_3(z)}=\frac{\theta_1'(z)\theta_4(z)-\theta_4'(z)\theta_1(z)}{\theta_2(z)\theta_3(z)}$$

فإننا سنجد أن الدالة $\phi(z)$ مزدوجة الدورية بالأدوار $\pi,\pi\tau$ ، و أقطاب $\phi(z)$ هي أقطاب بسيطة عند النقاط: $z\equiv\pi/2(\operatorname{mod}\pi,\pi\tau)$ و $z\equiv(\pi/2)+(\pi\tau/2)(\operatorname{mod}\pi,\pi\tau)$.

من العلاقات (4.32) نجد أن:

$$\phi\left(z+(\pi\tau/2)\right)=\frac{\theta_1'\left(z+(\pi\tau/2)\right)\theta_4\left(z+(\pi\tau/2)\right)-\theta_4'\left(z+(\pi\tau/2)\right)\theta_1\left(z+(\pi\tau/2)\right)}{\theta_2\left(z+(\pi\tau/2)\right)\theta_3\left(z+(\pi\tau/2)\right)}$$

$$=\phi(z)$$

ومن هنا نجد أن الدالة $\phi(z)$ مزدوجة الدورية بالأدوار $\pi\tau/2$, π. وأقطاب $\phi(z)$ هي أقطاب بسيطة بالنسبة لهذه الأدوار وهي $z\equiv(\pi/2)\left(\operatorname{mod}\pi,(\pi\tau/2)\right)$.

لأنه إذا كان z_0 قطب لـ $\phi(z)$ عندئذ فإن $z_0+m\pi+n(\pi\tau/2)$ هي أقطاب لـ $\phi(z)$ أيضاً .

وبالنسبة للأدوار π و $\pi\tau/2$ نجد أن أقطاب $\phi(z)$ هي:

$$z\equiv(\pi/2)\left(\operatorname{mod}\pi,(\pi\tau/2)\right)\Rightarrow z=(\pi/2)+m\pi+n(\pi\tau/2)\quad ;m,n\in\mathbb{Z}$$

$$z\equiv(\pi/2)+(\pi\tau/2)\left(\operatorname{mod}\pi,(\pi\tau/2)\right)\Rightarrow z=(\pi/2)+(\pi\tau/2)+m\pi+n(\pi\tau/2)\quad ;m,n\in\mathbb{Z}$$
$$\equiv(\pi/2)\left(\operatorname{mod}\pi,(\pi\tau/2)\right)$$

وهذا يعني أن لـ $\phi(z)$ قطب بسيط واحد فقط في كل خلية من خلايا شبكة الدور (رؤوس متوازي أضلاع الدور الابتدائي هي $\pi\tau/2$,$\pi+(\pi\tau/2)$,π ,0).

وبالتالي فإن $\phi(z)=c$ ، حيث c ثابت، و ذلك حسب مبرهنة ليوفيل.

بأخذ $z=0$ نجد أن: $\phi(0)=\theta_1'\theta_4\big/\theta_2\theta_3=\theta_1'\theta_4^2\big/\theta_2\theta_3\theta_4=\theta_4^2$. وبالتالي فإن $\phi(z)=\theta_4^2$، و منه:

$$\frac{d}{dz}\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}=\theta_4^2\frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}\frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}$$

وبشكل مماثل تماماً لما سبق نثبت أن:

$$\frac{d}{dz}\frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}=-\theta_3^2\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}\frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4.76)$$

$$\frac{d}{dz}\frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}=-\theta_2^2\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}\frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4.77)$$

وبوضع $\xi=\theta_1(z)/\theta_4(z)$ في (4.75) نجد أن:

$$\frac{d\xi}{dz}=\theta_4^2\frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}\frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (4.78)$$

لكن من العلاقات (4.26) ، (4.27) ، (4.28) ، (4.29) نجد أن:

$$\frac{\theta_2^2(z)}{\theta_4^2(z)}=\frac{\theta_2^2\theta_4^2(z)-\theta_3^2\theta_1^2(z)}{\theta_3^2\theta_3^2(z)-\theta_2^2\theta_2^2(z)}\quad,\quad\frac{\theta_3^2(z)}{\theta_4^2(z)}=\frac{\theta_3^2\theta_4^2(z)-\theta_2^2\theta_1^2(z)}{\theta_3^2\theta_3^2(z)-\theta_2^2\theta_2^2(z)}$$

ومنه بتربيع طرفي (4.78) والتعويض بالعلاقات السابقة ، و من (4.29) نجد أن:

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2=\frac{\left(\theta_2^2\theta_4^2(z)-\theta_3^2\theta_1^2(z)\right)\left(\theta_3^2\theta_4^2(z)-\theta_2^2\theta_1^2(z)\right)}{\theta_4^2(z)}$$

وبالتالي فإن:

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 = \left(\theta_2^2 - \theta_3^2\xi^2\right)\left(\theta_3^2 - \theta_2^2\xi^2\right) \qquad .... \; (4.79)$$

وبأخذ $\xi\theta_3/\theta_2 = y$ و $z\,\theta_3^2 = u$. أي $u = 2Kz/\pi$ ، و $k^{1/2} = \theta_2/\theta_3$ نجد أن:

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{\theta_2}{\theta_3}\frac{dy}{du}\frac{du}{dz} = \theta_2\theta_3\frac{dy}{du}$$

وبالتالي من (4.79) نجد:

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 = \theta_2^2\theta_3^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \left(\theta_2^2 - \frac{\theta_2^2}{\theta_3^2}y^2\theta_3^2\right)\left(\theta_3^2 - \frac{\theta_2^2}{\theta_3^2}y^2\theta_2^2\right)$$

ومنه:

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2) \qquad .... \; (4.80)$$

وبما أن $\xi = \theta_1(z)/\theta_4(z)$ حلاً للمعادلة (4.79). فإن: $\dfrac{\theta_2}{\theta_3}y = \dfrac{\theta_1\left(u\theta_3^{-2}\right)}{\theta_4\left(u\theta_3^{-2}\right)}$

أي : $y(u) = \left(\theta_3/\theta_2\right)\left(\theta_1(z)/\theta_4(z)\right)$. ستكون حلاً للمعادلة (4.80).

لكن $y(u) = sn(u) = sn(u,k)$. و بهذا نكون قد حصلنا على الدالة $sn(u)$، عن طريق الدوال ثيتا كحل للمعادلة (4.80) والتي توصلنا إليها من المعادلة (4.79).

ومن الجدير بالذكر أن العديد من المراجع تبدأ عند دراستها لنظرية الدوال الناقصية بدراسة الدوال ثيتا قبل دراسة دوال جاكوبي الناقصية ، وتقوم ببناء وتعريف دوال جاكوبي الناقصية واستنتاج الخواص الأساسية التي تحققها عن طريق الدوال ثيتا . مثل المراجع [48] و [36]على الشكل التالي:

ندعو الدالة $y(u) = \left(\theta_3/\theta_2\right)\left(\theta_1\left(u\theta_3^{-2}\right)/\theta_4\left(u\theta_3^{-2}\right)\right)$ ، والتي هي حل للمعادلة التفاضلية التالية:

$\left(dy/du\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$ ، بدالة جاكوبي الناقصية ونرمز لها بـ $sn(u)$. ونكتب:

$$sn(u,k) = sn(u) := \left(\theta_3/\theta_2\right)\left(\theta_1\left(u\theta_3^{-2}\right)/\theta_4\left(u\theta_3^{-2}\right)\right) \qquad ; k = \theta_2^2/\theta_3^2$$

ونعرف دوال جاكوبي الناقصية $cn(u), dn(u)$ بالشكل:

$$cn(u,k) = cn(u) := \frac{\theta_4}{\theta_2}\frac{\theta_2\left(u\theta_3^{-2}\right)}{\theta_4\left(u\theta_3^{-2}\right)} \quad , \quad dn(u,k) = dn(u) := \frac{\theta_4}{\theta_3}\frac{\theta_3\left(u\theta_3^{-2}\right)}{\theta_4\left(u\theta_3^{-2}\right)}$$

وبوضع $z = u\theta_3^{-2}$ ، وبما أن:

$$\theta_1(z+2\pi)/\theta_4(z+2\pi) = \theta_1(z)/\theta_4(z) \quad , \quad \theta_1(z+\pi\tau)/\theta_4(z+\pi\tau) = \theta_1(z)/\theta_4(z)$$

فإننا نجد أن الدالة $\theta_1(z)/\theta_4(z)$ مزدوجة الدورية بالأدوار $2\pi, \pi\tau$ بالنسبة لـ z .

وبالتالي فإن الدالة $\theta_1\left(u\theta_3^{-2}\right)/\theta_4\left(u\theta_3^{-2}\right)$ مزدوجة الدورية بالأدوار $2\pi\theta_3^2 \, , \, \pi\tau\theta_3^2$ بالنسبة لـ u .

ومنه فإن: $sn\left(u+2\pi\theta_3^2\right) = sn\left(u+\pi\tau\theta_3^2\right) = sn(u)$. أي أن $sn(u)$ مزدوجة الدورية.

⊛ **أقطاب** $sn(u)$ **:**

بما أن الدوال $\theta_1(z), \theta_4(z)$ دوال صحيحة فإن أقطاب $sn(u)$ هي أصفار $\theta_4\left(u\theta_3^{-2}\right)$. أي:

$$\theta_4\left(u\theta_3^{-2}\right) = 0 \Leftrightarrow u\theta_3^{-2} \equiv (\pi\tau/2)(\operatorname{mod}\pi, \pi\tau)$$

$$\Leftrightarrow u = (\pi\tau/2)\theta_3^2 + m\pi\theta_3^2 + n\pi\tau\theta_3^2 \qquad ; m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow u = (\pi\tau/2)\theta_3^2 + 2m\pi\theta_3^2 + n\pi\tau\theta_3^2 \quad \& \quad u = (\pi\tau/2)\theta_3^2 + (2m+1)\pi\theta_3^2 + n\pi\tau\theta_3^2$$

أي أن الأقطاب هي عبارة عن المجموعتين التاليتين:

الأولى: $\left\{u=(\pi\tau/2)\theta_3^2+2m\pi\theta_3^2+n\pi\tau\theta_3^2\ ;m,n\in\mathbb{Z}\right\}$

و الثانية: $\left\{u=(\pi\tau/2)\theta_3^2+(2m+1)\pi\theta_3^2+n\pi\tau\theta_3^2\ ;m,n\in\mathbb{Z}\right\}$

وهذه الأقطاب هي أقطاب بسيطة ، لذلك فإن $sn(u)$ دالة ناقصية من المرتبة الثانية.

كما أن: $$\operatorname{Res}\left(sn(u);(\pi\tau/2)\theta_3^2\right)=\frac{\theta_3}{\theta_2}\frac{\theta_1(\pi\tau/2)}{\theta_4'(\pi\tau/2)}$$

لكن: $\theta_1(\pi\tau/2)=iq^{-1/4}\theta_4$, $\theta_4(\pi\tau/2)=iq^{-1/4}\theta_1$, $\theta_4'(\pi\tau/2)=iq^{-1/4}\theta_1'$. وبالتالي:

$$\operatorname{Res}\left(sn(u);(\pi\tau/2)\theta_3^2\right)=\theta_3^3\theta_4\theta_1'\big/\theta_1'\theta_2^2\theta_3\theta_4=\theta_3^2/\theta_2^2=k^{-1}$$

و بالمثل نجد أن: $$\operatorname{Res}\left(sn(u);(\pi\tau/2)\theta_3^2+\pi\theta_3^2\right)=-k^{-1}$$

كما أن الدالة $cn(u)$ ناقصية من المرتبة الثانية بالأدوار $2\pi\theta_3^2$, $(\pi+\pi\tau)\theta_3^2$ ، أقطابها بسيطة عند النقاط:

$$u\equiv\frac{\pi\tau}{2}\theta_3^2\left(\operatorname{mod}2\pi\theta_3^2,(\pi+\pi\tau)\theta_3^2\right),\ u\equiv\left(\pi+\frac{\pi\tau}{2}\right)\theta_3^2\left(\operatorname{mod}2\pi\theta_3^2,(\pi+\pi\tau)\theta_3^2\right)$$

حيث أن:

$$\operatorname{Res}\left(cn(u);(\pi\tau/2)\theta_3^2\right)=-i\,k^{-1}\ ,\ \operatorname{Res}\left(cn(u);\left(\pi+(\pi\tau/2)\theta_3^2\right)\right)=i\,k^{-1}$$

و الدالة $dn(u)$ ناقصية من المرتبة الثانية بالأدوار $2\pi\tau\theta_3^2$, $\pi\theta_3^2$ ، أقطابها بسيطة عند النقاط:

$$u\equiv\frac{\pi\tau}{2}\theta_3^2\left(\operatorname{mod}\pi\theta_3^2,2\pi\tau\theta_3^2\right),\ u\equiv\frac{3\pi\tau}{2}\theta_3^2\left(\operatorname{mod}\pi\theta_3^2,2\pi\tau\theta_3^2\right)$$

حيث أن: $$\operatorname{Res}\left(dn(u);(\pi\tau/2)\theta_3^2\right)=-i\ ,\ \operatorname{Res}\left(dn(u);(3\pi\tau/2)\theta_3^2\right)=i$$

و بما أن الدالة $\theta_1(z)$ فردية ، و الدوال $\theta_j(z)\ (j=2,3,4)$ زوجية . فإن الدالة $sn(u)$ فردية و الدوال $cn(u),dn(u)$ زوجية.

⊛ من (4.26) و (4.27) نجد أن:

$$\theta_3^2\theta_1^2(z)+\theta_4^2\theta_2^2(z)=\theta_2^2\theta_4^2(z)\quad,\quad\theta_2^2\theta_1^2(z)+\theta_4^2\theta_3^2(z)=\theta_3^2\theta_4^2(z)$$

و بأخذ $z=\theta_3^{-2}u$ نجد أن:

$$\frac{\theta_3^2}{\theta_2^2}\frac{\theta_1^2\left(\theta_3^{-2}u\right)}{\theta_4^2\left(\theta_3^{-2}u\right)}+\frac{\theta_4^2}{\theta_2^2}\frac{\theta_2^2\left(\theta_3^{-2}u\right)}{\theta_4^2\left(\theta_3^{-2}u\right)}=1\quad,\quad\frac{\theta_2^2}{\theta_3^2}\frac{\theta_1^2\left(\theta_3^{-2}u\right)}{\theta_4^2\left(\theta_3^{-2}u\right)}+\frac{\theta_4^2}{\theta_3^2}\frac{\theta_3^2\left(\theta_3^{-2}u\right)}{\theta_4^2\left(\theta_3^{-2}u\right)}=1$$

و بالتالي فإن: $k^2sn^2(u)+dn^2(u)=1$, $sn^2(u)+cn^2(u)=1$ ، حيث أن $k=\theta_2^2/\theta_3^2$.

⊛ **صيغ الإضافة للدوال** sn, cn, dn :

بما أن:

$$\theta_2\theta_3\theta_1(z_1+z_2)\theta_4(z_1-z_2)=\theta_1(z_1)\theta_2(z_2)\theta_3(z_2)\theta_4(z_1)+\theta_1(z_2)\theta_2(z_1)\theta_3(z_1)\theta_4(z_2)$$

و لدينا: $\theta_4^2\theta_4(z_1+z_2)\theta_4(z_1-z_2)=\theta_4^2(z_1)\theta_4^2(z_2)-\theta_1^2(z_1)\theta_1^2(z_2)$. (أنظر العلاقة (4.41))

و بالتالي فإن:

$$\frac{\theta_2\theta_3}{\theta_4^2}\frac{\theta_1(z_1+z_2)}{\theta_4(z_1+z_2)}=\frac{\theta_1(z_1)\theta_2(z_2)\theta_4(z_1)+\theta_1(z_2)\theta_2(z_1)\theta_3(z_1)\theta_4(z_2)}{\theta_4^2(z_1)\theta_4^2(z_2)-\theta_1^2(z_1)\theta_1^2(z_2)}$$

و بوضع $z_1=\theta_3^{-2}u$ و $z_2=\theta_3^{-2}v$ ، وحسب تعريف الدوال sn, cn, dn . نجد أن:

$$sn(u+v)=\frac{sn(u)cn(v)dn(v)-sn(v)cn(u)dn(u)}{1-k^2sn^2(u)sn^2(v)}\quad;k=\theta_2^2/\theta_3^2$$

و بالمثل نوجد $cn(u+v)$, $dn(u+v)$.
و بذلك نجد أنه قد حصلنا على نفس النتائج و العلاقات الأساسية التي تم الحصول عليها في الفصل الثالث و ذلك عن طريق الدوال ثيتا و العلاقات الأساسية التي تحققها.

ترميز Neville للدوال ثيتا:
في عام 1944 قام E.H.Neville بوضع ترميز للدوال ثيتا بحيث يتناسب مع تعريف دوال جاكوبي الناقصية و بشكل خاص مع تعريف الدوال sn, cn, dn بدلالة الدوال $\theta_j(z)$ $(j=1,2,3,4)$ على الشكل التالي:

$$\theta_s(u)=(2K/\pi)\left(\theta_1(z,q)/\theta_1'(0,q)\right) \ , \ \theta_c(u)=\theta_2(z,q)/\theta_2(0,q)$$

$$\theta_d(u)=\theta_3(z,q)/\theta_3(0,q) \ , \ \theta_n(u)=\theta_4(z,q)/\theta_4(0,q)$$

حيث أن $u=2Kz/\pi, q=e^{\pi i\tau}$.
و قام بتعريف دوال جاكوبي الناقصية بالشكل التالي:

$$ab(u)=ab(u,k)=\theta_a(u)/\theta_b(u) \ ; a,b\in\{s,c,d,n\}, a\neq b$$

(4.7) ترميز جاكوبي للدوال ثيتا: (الدالة ثيتا $\Theta(u)$ و الدالة إيتا $H(u)$).
عرّف جاكوبي الدالة ثيتا و التي رَمّزها بـ $\Theta(u)$ بالشكل:

$$\Theta(u)=\Theta(u,k):=\theta_4(u\theta_3^{-2}|\tau)=\theta_4(z|\tau) \ ; z=u\theta_3^{-2}, \theta_3^2=2K/\pi, \tau=iK'/K$$

و منه: $\Theta(u+K)=\theta_4\left(\theta_3^{-2}(u+K)|\tau\right)=\theta_4\left(u\theta_3^{-2}+(\pi/2)|\tau\right)=\theta_3(u\theta_3^{-2}|\tau)$

و عرّف الدالة $H(u)$ و التي سماها الدالة إيتا (eta function) بالشكل:

$$H(u)=H(u,k):=-iq^{1/4}e^{\pi iu/2K}\Theta(u+iK')$$

و منه: $H(u)=-iq^{1/4}e^{iz}\theta_4\left(u\theta_3^{-2}+(\pi\tau/2)|\tau\right)=\theta_1(z|\tau)=\theta_1(u\theta_3^{-2}|\tau)$

و بذلك نجد أن: $H(u+K)=H(u+K,k)=\theta_2(u\theta_3^{-2}|\tau)=\theta_2(z|\tau)$

و عوامل الدورية للدالة $\Theta(u)$ المرتبطة بالأدوار $2iK', 2K$ هي على الترتيب $1, -q^{-1}e^{-2i(u\theta_3^{-2})}$.
حيث أن:

$$\Theta(u+2K)=\theta_4\left(u\theta_3^{-2}+2K\theta_3^{-2}|\tau\right)=\theta_4(u\theta_3^{-2}+\pi|\tau)=\theta_4(u\theta_3^{-2}|\tau)=\Theta(u)$$

$$\Theta(u+2iK')=\theta_4\left(u\theta_3^{-2}+\pi\tau|\tau\right)=-q^{-1}e^{-2i(u\theta_3^{-2})}\theta_4(u\theta_3^{-2}|\tau)=-q^{-1}e^{-2i(u\theta_3^{-2})}\Theta(u)$$

⊛ **الدالة** $\Theta'(u)/\Theta(u)$ **:**
إذا كان $\Theta'(u)=(d/du)\Theta(u)$. فإن النقاط الشاذة لـ $\Theta'(u)/\Theta(u)$ هي أصفار $\Theta(u)$ فقط .لأنه بأخذ:

$$f(u):=\Theta'(u)/\Theta(u)=\theta_3^{-2}\,\theta_4'(u\theta_3^{-2})\big/\theta_4(u\theta_3^{-2})$$

نجد أن النقاط الشاذة لـ $f(u)$ هي أصفار $\theta_4(u\theta_3^{-2})$، و هي أصفار بسيطة عند النقاط:
$u\theta_3^{-2}\equiv\pi\tau/2(\bmod\,\pi,\pi\tau)$. أي: $u\equiv iK'(\bmod\,2K,2iK')$.
و هذه النقاط هي الأقطاب البسيطة لـ $sn(u), cn(u), dn(u)$.
إذا كانت $a\in\mathbb{C}$ هي إحدى هذه الأقطاب . فإن: $\mathrm{Res}(f(u);a)=1$.
و الدالة $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right)=\dfrac{\Theta''(u)\Theta(u)-\Theta'^2(u)}{\Theta^2(u)}$ ، النقاط الشاذة لها هي أصفار $\Theta(u)$ و هي أقطاب مضاعفة. الراسب عند هذه الأقطاب يساوي الصفر.
و الدالة $(d/du)\left(\Theta'(u)/\Theta(u)\right)$ مزدوجة الدورية بالأدوار $2K, 2iK'$.
و من هنا نلاحظ أن $(d/du)\left(\Theta'(u)/\Theta(u)\right)$ هي دالة مزدوجة الدورية على الرغم من أن $\Theta'(u)/\Theta(u)$ ليست مزدوجة الدورية.

و بذلك نجد أنه بالفعل إذا كان لدينا دالة مزدوجة الدورية (ناقصية)، فإن مشتقها مزدوجة الدورية (ناقصية)، إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة.

(4.8) الدالة $E(u)$ ، و الدالة زيتا $Z(u)$:

الدالة $E(u)$: تعرّف الدالة $E(u)$ ، بالشكل: $E(u):=\int_0^u dn^2(w)\,dw \quad (u,w\in\mathbb{C})$

أو إن أمن الالتباس $E(u):=\int_0^u dn^2(u)\,du$.

و إذا كانت هناك حاجة لإظهار الوسيط $0<k<1$ ، فإننا نكتب $E(u,k)=\int_0^u dn^2(u,k)\,du$.

و نلاحظ أن $E(0)=0$ و $(d/du)E(u)=dn^2(u)$.

بما أن: " أنظر الفقرة (3.6)"

$$dn(u)=-i(u-iK')^{-1}+\left((2-k^2)/6\right)i(u-iK')+O\left((u-iK')^3\right) \ \&$$

$$dn(u)=i(u-iK')^{-1}+O\left((u-iK')\right)$$

فإن أقطاب $dn^2(u)$ من المرتبة الثانية، و الراسب عند كل منها يساوي الصفر، و هي نفسها أقطاب $dn(u)$.

أي $u\equiv iK'(\bmod 2K,2iK')$.

و بالتالي فإن أقطاب $E(u)$ بسيطة هي نفسها أقطاب $dn(u)$ ، و التكامل في $E(u)$ مستقل عن اختيار الطريق المسلوك[1].

كما أن $E(u,k)=E(k,\phi)$ ، حيث أن $\sin\phi=sn(u)$ ، و $E(k,\phi)$ التكامل الناقصي النظامي من النوع الثاني. و منه:

$$E(k,\phi)=E(K)=E(k)=E(\pi/2,k)=E=\int_0^K dn^2(u)\,du$$

(4.8.1) مبرهنة:

إن[2]: $E(u)=\Theta'(u)/\Theta(u)+u(E/K)$.

الدالة $Z(u)$:

تعرف الدالة $Z(u)$ بالشكل: $Z(u)=Z(u,k):=\Theta'(u)/\Theta(u)$

و تدعى هذه الدالة بدالة زيتا لجاكوبي (Jacobi's zeta function) .

و من التعريف نجد أن: $Z(u)=E(u)-u\left(E/K\right)$.

(4.8.2) تحويل جاكوبي التخيلي للدالتين $E(u), Z(u)$:

مبرهنة:

لتكن $u\in\mathbb{C}$. إن:

$$Z(iu,k)=i\,dn(u,k')sc(u,k')-iZ(u,k')-\left(\pi i\,u/2KK'\right)$$

$$E(iu,k)=i\,u+i\,dn(u,k')sc(u,k')-iE(u,k')$$

علاقة ليجاندر:

يمكننا بالاستفادة من تحويل جاكوبي التخيلي للدالتين $E(u), Z(u)$ ، التوصل إلى العلاقة الهامة التالية:

$$EK'+E'K-KK'=\pi/2$$

حيث أن: $E'=E(k')=E(K',k')=\int_0^{K'} dn^2(u,k')\,du$ ، و التي تدعى بعلاقة ليجاندر.

---

[1] أنظر[3],pp.129

[2] إذا كانت هناك حاجة لإظهار الوسيط $0<k<1$ فإننا نكتب $E(u,k)=\left(\Theta'(u,k)/\Theta(u,k)\right)=u\left(E(k)/K(k)\right)$

(4.8.3) صيغتا الإضافة للدالتين $E(u), Z(u)$:

مبرهنة:

مهما يكن $u,v \in \mathbb{C}$. فإن:

$$E(u+v) = E(u) + E(v) - k^2 sn(u) sn(v) sn(u+v)$$

$$Z(u+v) = Z(u) + Z(v) - k^2 sn(u) sn(v) sn(u+v)$$

الإثبات:

لنأخذ الدالة:

$$f(u) = \frac{\Theta'(u+v)}{\Theta(u+v)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + k^2 sn(u) sn(v) sn(u+v)$$

و التي تتبع لـ u (باعتبار أن v ثابت).

فنجد أن $f(u)$ مزدوجة الدورية بالأدوار $2K, 2iK'$.

و أقطابها بسيطة عند النقاط $u \equiv iK' (\bmod 2K, 2iK')$ و $u \equiv (iK'-v)(\bmod 2K, 2iK')$.

لأنه:

أولاً: أقطاب $\Theta'(u)/\Theta(u)$ بسيطة عند النقاط $u \equiv iK'(\bmod 2K, 2iK')$ ، و الراسب عند هذه النقاط يساوي 1. و أقطاب $sn(u)$ بسيطة أيضاً عند مجموعتين من النقاط هما:

المجموعة الأولى: $u \equiv iK'(\bmod 4K, 2iK')$ ، و الراسب لـ $sn(u)$ عند هذه النقاط يساوي k^{-1} .

المجموعة الثانية: $u \equiv 2K + iK'(\bmod 4K, 2iK')$ ، و الراسب لـ $sn(u)$ عند هذه النقاط يساوي $-k^{-1}$.

و هاتين المجموعتين يمكن جمعهما في مجموعة واحدة هي: $u \equiv iK'(\bmod 2K, 2iK')$.

و الدوال $sn(u+v), \Theta'(u+v)/\Theta(u+v)$ ، تحليلية عند نقاط هذه المجموعة.

ثانياً: أقطاب $\Theta'(u+v)/\Theta(u+v)$ بسيطة عند النقاط $u \equiv (iK'-v)(\bmod 2K, 2iK')$ ، و الراسب عند هذه النقاط يساوي 1.

و أقطاب $sn(u+v)$ بسيطة عند مجموعتين من النقاط هما:

الأولى: $u \equiv (iK'-v)(\bmod 4K, 2iK')$ ، و راسب $sn(u+v)$ عند هذه النقاط يساوي k^{-1} .

الثانية: $u \equiv (2K + iK'-v)(\bmod 4K, 2iK')$ ، و راسب $sn(u+v)$ عند هذه النقاط يساوي $-k^{-1}$.

و هاتين المجموعتين يمكن جمعهما بمجموعة واحدة هي $u \equiv (iK'-v)(\bmod 2K, 2iK')$.

و الدوال $sn(u), \Theta'(u)/\Theta(u)$ تحليلية عند نقاط هذه المجموعة.

لنحسب الآن راسب الدالة $f(u)$ عند النقاط $u \equiv iK'(\bmod 2K, 2iK')$.

إن راسب الدالة $\Theta'(u)/\Theta(u)$ عند هذه النقاط يساوي 1 . و بالتالي فإن نشر لوران لها في جوار لهذه النقاط هو

$$\Theta'(u)/\Theta(u) = (u-iK')^{-1} + A + B(u-iK') + C(u-iK')^2 + \dots$$

حيث أن $A, B, C, \dots$ ثوابث من $\mathbb{C}$.

و مجموعة النقاط هذه تنقسم إلى قسمين: $u \equiv iK'(\bmod 4K, 2iK')$ و $u \equiv 2K + iK'(\bmod 4K, 2iK')$

فمن أجل نقاط القسم الأول نجد أن راسب الدالة $sn(u)sn(v)sn(u+v)$ عندها هو:

$$sn(v)sn(iK'+v)\operatorname{Res}\left(sn(u); iK'\right) = k^{-2}$$

و من أجل نقاط القسم الثاني نجد أن راسب $sn(u)sn(v)sn(u+v)$ عندها هو:

$$sn(v)sn(2K+iK'+v)\operatorname{Res}\left(sn(u); 2K+iK'\right) = k^{-2} = k^{-2}$$

و منه فإن نشر لوران للدالة $k^2 sn(u)sn(v)sn(u+v)$ في جوار الأقطاب البسيطة $u \equiv iK'(\bmod 2K, 2iK')$ هو:

$$k^2 sn(u)sn(v)sn(u+v) = k^2\left(k^2(u-iK')^{-1} + \alpha + \beta(u-iK') + \gamma(u-iK')^2 + \dots\right)$$

حيث $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in \mathbb{C}$.

و منه فإن نشر لوران لـ $f(u)$ في جوار هذه الأقطاب لا يحوي الحد $a_{-1}(u-iK')^{-1}$. أي أن راسب $f(u)$ عند هذه الأقطاب يساوي الصفر.

و منه فإنه ليس لـ $f(u)$ أقطاب عند النقاط $u \equiv iK'(\mathrm{mod}\, 2K, 2iK')$.
و المناقشة السابقة تتم تماماً على النقاط $u \equiv (iK'-v)(\mathrm{mod}\, 2K, 2iK')$.
أي أنه ليس لـ $f(u)$ أقطاب عند هذه النقاط.
و مما سبق نجد أن $f(u)$ دالة مزدوجة الدورية ليس لها أقطاب . أي أنها صحيحة ، و بالتالي فهي ثابتة حسب ليوفيل.
لحساب هذا الثابت نأخذ $u=0$ ، فنجد أن $f(0)=0$.
و بما أن $Z(u)=\Theta'(u)/\Theta(u)$ و $Z(u)=E(u)-u\left(E/K\right)$. نجد صيغ الإضافة المطلوبة.

⊛ من تعريف الدالتين $E(u), Z(u)$ ، و من صيغتي الإضافة لهما ، و علاقة ليجاندر. نجد أن:

$$E(u+2K)=E(u)+2E \;\; , \; E(u+2iK')=E(u)+2i(K'-E')$$

$$Z(u+2K)=Z(u) \;\; , \;\; Z(u+2iK')=Z(u)+2i\left(K'-E'-E(K'/K)\right)$$

(4.9) مقدمة في نظرية التحويلات للدوال ثيتا:

لتكن $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ ، و لنكتب $\tau' = A\tau$ للدلالة على أن $\tau'=(a\tau+b)/(c\tau+d)$.

سنوجد في هذه الفقرة العلاقة بين $\theta_1(z|\tau)$ و $\theta_1\left(\dfrac{z}{c\tau+d}\Big|\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ ، بحيث $c \geq 0$.

لكن نلاحظ في البداية أنه إذا كان لدينا $ad-bc=1$. فإن a و c إما أن يكونا فرديان معاً أو أحدهما زوجي و الآخر فردي (أي لا يمكن أن يكونا زوجيان معاً) . و بالمثل b و d لا يمكن أن يكونا زوجيان معاً.
كما أنه إذا كان لدينا $\tau'=(a\tau+b)/(c\tau+d)$ بحيث $ad-bc=1$. فإن:

$$(c\tau+d)(c\tau'-a)=-1 \qquad (1)$$

$$(c\tau+d)^{-1}=(-c\tau'+a) \qquad (2)$$

$$\tau(c\tau+d)^{-1}=d\tau'-b \qquad (3)$$

$$(d\tau'-b)(c\tau+d)=\tau \qquad (4)$$

$$d(d\tau'-b)-\tau=-c\tau(d\tau'-b) \qquad (5) \qquad \text{..................} \; (4.83)$$

نعلم أن أصفار $\theta_1(z|\tau)$ تشكل شبكة في $\mathbb{C}$ و هي $\Lambda=\{m\pi+n\pi\tau; m,n\in\mathbb{Z}\}$ ،
و إذا كان لدينا التحويل المعياري:

$$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w'_2 \\ w'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix} \quad ; \; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

بحيث $w_1=\pi \; , w_2=\pi\tau$. فإن:

$$w'_2=a\pi\tau+b\pi \quad , \quad w'_1=c\pi\tau+d\pi$$

و يكون (w'_1,w'_2) أساس للشبكة Λ نفسها. و منه:

$$\Lambda=\{m\pi+n\pi\tau; m,n\in\mathbb{Z}\} \equiv \{m(c\tau+d)\pi+n(a\tau+b)\pi \; ; m,n\in\mathbb{Z}\}$$

بالضرب بـ $(c\tau+d)^{-1}$. فإننا نحصل على الشبكة:

$$\Lambda'=\{m\pi+n\pi\left((a\tau+b)/(c\tau+d)\right) ; m,n\in\mathbb{Z}\}$$

و بالتالي فإن الدالة $\theta_1\left(\dfrac{z}{c\tau+d}\Big|\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ و الدالة $\theta_1(z|\tau)$ لهما نفس الأصفار.

من أجل $\in SL(2,\mathbb{Z})$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. فإن[1]:

$\tau \mapsto \tau' = -\tau^{-1}$ ، و $\theta_1\left(z\tau^{-1} | -\tau^{-1}\right) = -i\,(-i\tau)^{1/2} e^{-z^2/\pi i\tau}\theta_1(z|\tau)$.

و من أجل $c=0$ فإن $a=d=1$ ، و b سيكون إما زوجي أو فردي.

أي من أجل:

أولاً: $A=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، و b زوجي . فإن:

$$\theta_1(z|\tau+b) = -ie^{\pi i\tau/4}e^{\pi i b/4}e^{iz}\,\theta_4\left(z+(\pi\tau/2)\right) = e^{\pi i b/4}\theta_1(z|\tau)$$

ثانياً: من أجل $A=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $b=2r+1$ فردي حيث $r\in\mathbb{Z}$.

سنبرهن أن $\theta_1(z|\tau+b) = e^{\pi ib/4}\theta_1(z|\tau)$.

لدينا:

$$\theta_1(z|\tau+b) = -ie^{\pi i\tau/4}e^{\pi i b/4}e^{iz}\,\theta_4\left(z+(\pi\tau/2)+(\pi b/2)\right) = -ie^{\pi i b/4}\theta_2(z|\tau)$$

و بوضع $G(z)=\theta_1(z|\tau+b)/\theta_1(z|\tau)$. فإننا نجد أن:

$$G(z+\pi)=G(z)\ ,\ G(z+\pi\tau)=G(z)$$

و منه فإن $G(z)$ دالة صحيحة ، مزدوجة الدورية بالأدوار $\pi,\pi\tau$. و بالتالي فهي ثابتة حسب مبرهنة ليوفيل.

أي: $\theta_1(z|\tau+b)=\lambda\theta_1(z|\tau)$ ، حيث λ ثابت.

لإيجاد قيمة λ . نقسم الطرفين على z و نأخذ نهاية الطرفين عندما $z\to 0$ ، فنجد أن:

$$\theta_1'(0|\tau+b)=\lambda\theta_1'(0|\tau)$$

لكن $\theta_1'(0|\tau)=2e^{\pi i\tau/4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2n\pi i\tau}\right)^3$ ، و منه: $\theta_1'(0|\tau+b)=e^{\pi ib/4}\theta_1'(0|\tau)$.

و بالتالي فإن $\lambda=e^{\pi i b/4}$. أي أن:

$$\theta_1(z|\tau+b)=e^{\pi i b/4}\theta_1(z|\tau) \qquad \text{..................}\ (4.84)$$

بأخذ $b=1$ ، أي $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. فإن $\tau\mapsto\tau'=\tau+1$ ، و يكون: $\theta_1(z|\tau+1)=e^{\pi i/4}\theta_1(z|\tau)$

و بذلك نجد أن (4.84) تحدد العلاقة بين $\theta_1\left(\frac{z}{c\tau+d}\Big|\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ و $\theta_1(z|\tau)$ ، و ذلك من أجل

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، حيث أن $b\in\mathbb{Z}$.

لنفرض الآن أن $c>0$. و لنضع $F(z)=\dfrac{\theta_1\left(z/(c\tau+d)|\tau'\right)}{\theta_1(z|\tau)}$ ، حيث أن $\tau'=(a\tau+b)/(c\tau+d)$.

فنجد أن الدالة $F(z)$ صحيحة ، زوجية ، و يكون لدينا:

$$F(z+\pi)=\frac{\theta_1\left(\left(z/(c\tau+d)\right)+(a-c\tau')\pi|\tau'\right)}{\theta_1(z+\pi|\tau)} \qquad ;\ \text{from } 4.83(2)$$

$$=(-1)^{a+1-c}e^{-ic^2\pi\tau'}e^{2icz/(c\tau+d)}\,\frac{\theta_1\left(z/(c\tau+d)|\tau'\right)}{\theta_1(z|\tau)}$$

لكن بما أن a و c لا يمكن أن يكونا زوجيان معاً ، فإن $a+1-c-ac=(1+a)(1-c)$ سيكون زوجياً.

---

[1] أنظر العلاقة $(4.64)'$.

و منه:

$$F(z+\pi)=(-1)^{ac}e^{-ic^2\pi\tau'}e^{2icz/(c\tau+d)}F(z)=e^{\pi iac}e^{-ic^2\pi\tau'}e^{2icz/(c\tau+d)}F(z)$$
$$=e^{-\pi ic(c\tau'-a)}e^{2icz/(c\tau+d)}F(z)=e^{\pi ic/(c\tau+d)}e^{2icz/(c\tau+d)}F(z)\quad ;\ \text{from } 4.83(1)$$
$$=e^{ic(2z+\pi)/(c\tau+d)}F(z)\qquad \text{..................}\ (4.85)$$

كما أنه من((4.83(4) نجد:

$$F(z+\pi\tau)=\frac{\theta_1\left(\left(z/(c\tau+d)\right)-b\pi+d\pi\tau'|\tau'\right)}{\theta_1(z+\pi\tau|\tau)}$$

إلا أنه بما أن: $\theta_1(z+n\pi+m\pi\tau|\tau)=(-1)^{m+n}e^{-2miz}e^{-im^2\pi\tau}\theta_1(z|\tau)$. فإن:

$$\theta_1\left(\left(z/(c\tau+d)\right)-b\pi+d\pi\tau'|\tau'\right)=(-1)^{d-b}e^{-2idz/(c\tau+d)}e^{-id^2\pi\tau'}\theta_1(z/(c\tau+d)|\tau')$$

و لدينا $\theta_1(z+\pi\tau|\tau)=-e^{-\pi i\tau}e^{-2iz}\theta_1(z|\tau)$. و منه:

$$F(z+\pi\tau)=(-1)^{-b+d+1}e^{-i\pi d^2\tau'}e^{-2idz/(c\tau+d)}e^{\pi i\tau}e^{2iz}F(z)$$

لكن بما أن b و d لا يمكن أن يكونا زوجيان معاً ، فإن $1-b+d-bd=(1-b)(1+d)$ سيكون زوجياً.

و منه $(-1)^{-b+d+1}=(-1)^{bd}=e^{\pi ibd}$. و بالتالي:

$$F(z+\pi\tau)=e^{-\pi i\left(d(d\tau'-b)-\tau\right)}e^{\frac{-2iz}{c\tau+d}\left(d-(c\tau+d)\right)}F(z)$$
$$=\exp\left(\pi ic\tau(d\tau'-b)\right).\exp\left(2ic\tau z/(c\tau+d)\right).F(z)\quad ;\ \text{from } 4.83(5)$$
$$=\exp\left(\pi ic\tau^2/(c\tau+d)\right).\exp\left(2ic\tau z/(c\tau+d)\right).F(z)\quad ;\ \text{from } 4.83(3)$$
$$=\exp\left(ci\tau(2z+\pi\tau)/(c\tau+d)\right).F(z)\qquad \text{..................}\ (4.86)$$

إلا أنه نعلم أن الدالة $f(z)=e^{tz^2}\neq 0$ ، حيث $t\in\mathbb{C}$ ، هي دالة زوجية، صحيحة ، تحقق أن:

$$\forall z\in\mathbb{C};\ f(z+s)=e^{t(z+s)^2}=e^{ts(2z+s)}f(z)\qquad \text{.................}\ (4.87)$$

و نلاحظ أنه عندما $s=\pi$ فإن(4.85) تتشابه مع (4.87) إذا كان $t\pi=ic/(c\tau+d)$.

و أنه عندما $s=\pi\tau$ فإن (4.86) تتشابه مع (4.87) إذا كان $t\pi\tau=ci\tau/(c\tau+d)$.

و بالتالي فإنه بأخذ $t=ic\pi^{-1}(c\tau+d)^{-1}$. فإن: $f(z)=e^{tz^2}=e^{iz^2c\pi^{-1}(c\tau+d)^{-1}}$.

و سيكون لدينا:

$$f(z+\pi)=\exp\left(\frac{ic(2z+\pi)}{c\tau+d}\right)f(z)\quad ,\quad f(z+\pi\tau)=\exp\left(\frac{ic\tau(2z+\pi\tau)}{c\tau+d}\right)f(z)$$

و بوضع $H(z):=F(z)/f(z)$. نجد أن:

$$H(z+\pi)=H(z+\pi\tau)=H(z)$$

و بما أن $(\forall z\in\mathbb{C})f(z)\not\equiv 0$ ، و $F(z)$ دالة صحيحة . فإن $H(z)$ ستكون صحيحة و مزدوجة الدورية بالأدوار $\pi,\pi\tau$ ، و بالتالي حسب ليوفيل ستكون ثابتة.

أي $F(z)=C\,f(z)$ ، حيث C ثابت مستقل عن z . و منه:

$$\theta_1\left(z/(c\tau+d)|\tau'\right)=C\exp\left(icz^2/\pi(c\tau+d)\right)\theta_1(z|\tau)\qquad \text{................}\ (4.88)$$

سنثبت الآن أن C يعتمد على τ و على المصفوفة $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

لنكتب (4.88) بالشكل: $\theta_1(z'|\tau')=C\exp(\pi^{-1}i\rho z^2)\theta_1(z|\tau)$.

حيث $z'=z/(c\tau+d)\ ,\ \rho=c/(c\tau+d)$.

و بوضع $\psi=\psi(z|\tau)=\exp(\pi^{-1}i\rho z^2)$. نجد:

$$\theta_1(z'|\tau')=C\,\psi\,\theta_1(z|\tau)\qquad \text{.................}\ (4.89)$$

(4.9.1) توطئة:

إذا كانت $\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d)$ و $z' = z/(c\tau + d)$. فإن:

$$4\pi^{-1} i \frac{\partial}{\partial \tau'} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = (c\tau + d)^2 \left(4\pi^{-1} i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + 4\pi^{-1} i c\, z\, (c\tau + d) \frac{\partial}{\partial z} \quad .... (4.90)$$

⊛ من (4.90) نجد أن:

$$4\pi^{-1} i \frac{\partial}{\partial \tau'} - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = (c\tau + d)^2 \left(4\pi^{-1} i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 4\pi^{-1} i \rho z \frac{\partial}{\partial z} \right) \;\; ; \; \rho = c/(c\tau + d)$$

بتطبيق المؤثر الأخير على طرفي العلاقة (4.89) .

و بما أن: $4\pi^{-1} i \frac{\partial}{\partial \tau'} \theta_1(z' | \tau') - \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \theta_1(z' | \tau') = 0$ ، أنظر (4.1.7) ، و $(c\tau + d)^2 \neq 0$. فإن:

$$4\pi^{-1} i \frac{\partial}{\partial \tau} \left(C\psi\, \theta_1(z | \tau) \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(C\psi\, \theta_1(z | \tau) \right) + 4\pi^{-1} i \rho z \frac{\partial}{\partial z} \left(C\psi\, \theta_1(z | \tau) \right) = 0$$

و من أجل الإختصار لنعتبر(هنا فقط) أن: $\psi = \psi(z | \tau), \theta_1 = \theta_1(z | \tau)$ (دوال بـ z و τ). فنجد أن:

$$4\pi^{-1} i \frac{\partial C}{\partial \tau} \psi\, \theta_1 + 4\pi^{-1} i C \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \theta_1 - C \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \theta_1 + 4\pi^{-1} i \rho z C \frac{\partial \psi}{\partial z} \theta_1 = 0$$

نقسم على $\theta_1 = \theta_1(z | \tau)$ عندما $0 < |z| << 1$. فنجد:

$$4\pi^{-1} i \frac{\partial C}{\partial \tau} \psi + 4\pi^{-1} i C \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - C \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 4\pi^{-1} i \rho z C \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

بأخذ نهاية الطرفين للعلاقة الأخيرة عندما $z \to 0$ و بملاحظة أن:

$$\psi \Big|_{z=0} = 1 \, , \; \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \;\; , \;\; \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \Big|_{z=0} = 0 \;\; , \;\; \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 2\pi^{-1} i \rho$$

فإننا نجد أن: $\partial C / \partial \tau = (1/2) \left(c/(c\tau + d) \right) C$.

لنضع $C = C_0 (c\tau + d)^{1/2}$. و لنبرهن أن C_0 مستقل عن τ .

إن: $\partial C / \partial \tau = (1/2) c C_0 (c\tau + d)^{-1/2} + \left(\partial C_0 / \partial \tau \right) (c\tau + d)^{1/2}$

و منه: $\left(\partial C_0 / \partial \tau \right) (c\tau + d)^{1/2} = 0$. لكن $(c\tau + d)^{1/2} \neq 0$. و منه $\partial C_0 / \partial \tau = 0$.

أي أن C_0 مستقل عن τ .

نعوض القيمة $C = C_0 (c\tau + d)^{1/2}$ في (4.88) فنجد أن:

$$\theta_1 \left(z/(c\tau + d) | \tau' \right) = C_0 (c\tau + d)^{1/2} \exp\left(i c z^2 / \pi (c\tau + d) \right) \theta_1(z | \tau) \quad .... (4.91)$$

و الثابت C_0 مستقل عن τ كما وجدنا . و سنرى على أنه يعتمد على المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ،

و أن $C_0{}^8 = \left(C_0(A) \right)^8 = 1$. (النتيجة 4.10.5).

لنقسم طرفي (4.91) على $z/(c\tau + d) \neq 0$. فنجد أن:

$$\frac{\theta_1 \left(z/(c\tau + d) | \tau' \right)}{z/(c\tau + d)} = C_0 (c\tau + d)^{3/2} \exp\left(\frac{i c z^2}{\pi (c\tau + d)} \right) \frac{\theta_1(z | \tau)}{z}$$

و بأخذ نهاية الطرفين للعلاقة الأخيرة عندما $z \to 0$ نجد أن:

$$\theta_1'(0 | \tau') = C_0 (c\tau + d)^{3/2} \theta_1'(0 | \tau) \quad .... (4.92)$$

(4.9.2) دالة ديدكند- إيتا: (Dedekind $-\eta$ function)

تُعرّف هذه الدالة في $\mathcal{H}=\{\tau;\operatorname{Im}\tau>0\}$ بالمعادلة:

$$\eta(\tau)=e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi in\tau}\right)=q^{1/12}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)$$

حيث أن $q=e^{\pi i\tau}$ و $\operatorname{Im}\tau>0$.

بما أن $|q|<1$ فإن الجداء متقارب بالإطلاق و هو أيضاً متقارب بانتظام في كل مجموعة جزئية متراصة من $\mathcal{H}$ و بالتالي فإن $\eta(\tau)$ تحليلية في $\mathcal{H}$.

و لهذه الدالة دور هام و كبير في التطبيقات للدوال المعيارية (و التي ستمر معنا في الفصل الخامس) في نظرية الأعداد.

بما أن: $\theta_1'(0|\tau)=2e^{\pi i\tau/4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi in\tau}\right)^3$. فإنه ينتج من التعريف أن $\eta^3(\tau)=(1/2)\,\theta_1'(0|\tau)$.

و العلاقة (4.92) تصبح بالشكل: $\eta^3(\tau')=C_0(c\tau+d)^{3/2}\eta^3(\tau)$.

و بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين نجد أن: $\eta(\tau')=wC_0^{1/3}(c\tau+d)^{1/2}\eta(\tau)$.

حيث أن $w=(1)^{1/3}$ أحد الجذور التكعيبية للوحدة. أي:

$$\eta(A\circ\tau)=\eta(\tau')=\chi(A)(c\tau+d)^{1/2}\eta(\tau)\qquad ....\ (4.93)$$

حيث أن $\chi(A)=wC_0^{1/3}$. أي $C_0=\left(\chi(A)\right)^3$.

(4.9.3) مبرهنة:

إذا كان $A,B\in SL(2,\mathbb{Z})$. فإن: $\chi(AB)=\mp\chi(A)\chi(B)$.

(4.9.4) مبرهنة:

مهما تكن $A\in SL(2,\mathbb{Z})$. فإن $\left(\chi(A)\right)^{24}=1$.

(4.9.5) نتيجة:

من أجل $A\in SL(2,\mathbb{Z})$. يكون: $C_0^{\,8}=\left(C_0(A)\right)^8=1$.

و بذلك نكون قد توصلنا إلى أن $C_0=C_0(A)=\left(\chi(A)\right)^3$. و العلاقة (4.91) تصبح بالشكل:

$$\theta_1\left(z/(c\tau+d)|\tau'\right)=\left(\chi(A)\right)^3(c\tau+d)^{1/2}\exp\left(icz^2/\pi(c\tau+d)\right)\theta_1(z|\tau)$$

(4.9.6) الدوال $f\ ,f_1,f_2$:

تُعرّف الدوال $f(\tau),f_1(\tau),f_2(\tau)$ ، حيث أن $\operatorname{Im}\tau>0$. بالشكل:

$$f(\tau)=q^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}\right)\ ,\ f_1(\tau)=q^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}\right),\ f_2(\tau)=\sqrt{2}\,q^{1/12}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n}\right)$$

و هذه الدوال سيكون لها أهمية كبيرة في دراستنا في الفصل السابع . و سنذكر الآن أهم العلاقات و الخصائص التي تحققها هذه الدوال.

لدينا $\eta(\tau)=q^{1/12}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)$. و نلاحظ بداية أن:

$$\theta_1'=\theta_1'(0)=2\eta^3(\tau)\ \ ,\ \theta_2=\theta_2(0)=\eta(\tau)f_2^{\,2}(\tau)$$
$$\theta_3=\theta_3(0)=\eta(\tau)f^{\,2}(\tau)\ \ ,\ \theta_4=\theta_4(0)=\eta(\tau)f_1^{\,2}(\tau)$$

و بما أن $\theta_3^{\,4}=\theta_2^{\,4}+\theta_4^{\,4}$. فإن: $f^{\,8}(\tau)=f_1^{\,8}(\tau)+f_2^{\,8}(\tau)$.

و بما أن $\theta_1'/\theta_2\theta_3\theta_4$. فإن: $f(\tau)f_1(\tau)f_2(\tau)=\sqrt{2}$. كما أن:

$$f(\tau)=\frac{e^{-\pi i/24}\eta\left((\tau+1)/2\right)}{\eta(\tau)}$$
$$f_1(\tau)=\frac{\eta\left(\tau/2\right)}{\eta(\tau)}$$
$$f_2(\tau)=\sqrt{2}\,\eta(2\tau)/\eta(\tau) \qquad \text{.................... (4.94)}$$

$$f(\tau+1)=e^{-\pi i/24}f_1(\tau)$$
$$f_1(\tau+1)=e^{-\pi i/24}f(\tau)$$
$$f_2(\tau+1)=e^{\pi i/12}f_2(\tau) \qquad \text{.................... (4.95)}$$

كما أن:

$$f(\tau+2)=e^{-\pi i/12}f(\tau)\ \ ,\ \ f(\tau+48)=f(\tau)\ \ ,\ \ f(\tau)=f(-\tau^{-1})$$
$$f_1(-\tau^{-1})=f_2(\tau)\ ,\ f_2(-\tau^{-1})=f_1(\tau)\ ,\ f(\tau)f\left((\tau-1)/(\tau+1)\right)=\sqrt{2}$$

(4.9.7) ملاحظة:

في الفصل الرابع بأكمله درسنا الدوال ثيتا و خصائصها و الكثير من العلاقات فيما بينها، و علاقتها بعدد من الدوال، و بشكل خاص علاقتها مع دوال جاكوبي الناقصية ، و كان ذلك من أجل $\tau=iK'/K$ ، حيث أن $K,K'\in\mathbb{R}$ ، و $q=e^{\pi i\tau}$.

إلا أنه باستخدام مبرهنة الوحدانية[1] (the uniqueness theorem of complex analysis).

فإنه يمكننا أن نُعرّف الدوال $sn(u),cn(u),dn(u)$ بالشكل:

$$sn(u)=k^{-1/2}\,\theta_1\left(\theta_3^{-2}u\right)/\theta_4\left(\theta_3^{-2}u\right)$$
$$cn(u)=k'^{1/2}k^{-1/2}\,\theta_2\left(\theta_3^{-2}u\right)/\theta_4\left(\theta_3^{-2}u\right)$$
$$dn(u)=k'^{1/2}\,\theta_3\left(\theta_3^{-2}u\right)/\theta_4\left(\theta_3^{-2}u\right)$$

و ذلك من أجل $\tau\in\mathcal{H}$.و بحيث:

$$k^{1/2}=\theta_2(0|\tau)/\theta_3(0|\tau)\ ,\ k'^{1/2}=\theta_2(0|\tau')/\theta_3(0|\tau')\ ,\ k^2+k'^2=1\ ,\ 2K/\pi=\theta_3^{\,2}(0|\tau)$$

و من (4.61) نجد $2K'/\pi=\theta_3^{\,2}(0|\tau')$.

و ستحقق دوال جاكوبي الناقصية المعرفة بهذا الشكل (من أجل $\tau\in\mathcal{H}$) كل الخصائص و العلاقات و المعادلات التي درسناها في الفصل الثالث.

و من الجدير بالذكر أن العديد من المراجع مثل [48] تعرف مباشرة الدوال ثيتا (على سبيل المثال الدالة $\theta_4(z)$) بالشكل التالي:

ليكن τ عدد عقدي (ثابت)، بحيث $\operatorname{Im}\tau>0$. و ليكن $q=e^{\pi i\tau}$، و منه $|q|<1$.

نعرف الدالة $\theta_4(z)$ بالشكل: $\theta_4(z)=\theta_4(z|\tau)=\theta_4(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2niz}$.

و بالمثل من أجل بقية الدوال.

[1] أنظر [3],pp.38 .

(4.10) العلاقة بين نظرية الدوال الناقصية و نظرية الأعداد:

ذكرنا سابقاً أن لنظرية الدوال الناقصية أهمية كبيرة و تطبيقات واسعة في فروع مختلفة من الرياضيات، و من أهمها الجبر و نظرية الأعداد. فهناك العديد من المسائل في نظرية الأعداد لم يتم التمكن من حلها إلا عن طريق الدوال الناقصية و الدوال ثيتا ، مثل مسألة التمثيل للأعداد الصحيحة الموجبة على شكل مجموع مربعات لأعداد صحيحة.

فمن جهة أولى، بأخذ $z = 0$ في العلاقة (3.36) نجد أن $1 = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^{2m}}$.

و منه: $2K/\pi = 1 + 4\sum_{m=1}^{\infty} q^m / 1 + q^{2m}$ ، و بما أن $|q| < 1$ ، فإن:

$$2K/\pi = 1 + 4\sum_{m=1}^{\infty} q^m \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l q^{2ml} = 1 + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l q^{(2l+1)m}$$

و بأخذ $n = (2l+1)m$ و $d = 2l+1$. نجد $l = (d-1)/2$ ، و أن d تتحول على مجموعة القواسم الفردية للعدد n. و منه:

$$2K/\pi = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n, d \text{ odd}}(-1)^{(d-1)/2}\right)q^n$$

لنعرف :

$$\chi(m) = 0 \quad ; m \text{ is even}$$
$$= (-1)^{(m-1)/2} \quad ; m \text{ is odd}$$

(نلاحظ أن $\chi(m) = 1$ إذا كان m فردي و $m \equiv 1(\text{mod } 4)$. و $\chi(m) = -1$ إذا كان m فردي و $m \equiv 3(\text{mod } 4)$)

و بوضع $\delta(n) = \sum_{d|n}\chi(d)$. فإننا نجد أن:

$$2K/\pi = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\chi(d)\right)q^n = 1 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\delta(n)q^n \qquad .... (4.96)$$

(4.10.1) كتابة الأعداد الصحيحة الموجبة على شكل مجموع مربعين لأعداد صحيحة:

تعريف:

تُعرّف $r_2(n)$ ، حيث $n \geq 1$ ، بأنها عدد التمثيلات أو عدد الطرق التي يمكن بها كتابة العدد n على شكل مجموع مربعين لأعداد صحيحة مع الأخذ باختلاف ترتيب و إشارات هذه الأعداد بعين الإعتبار في العد.

أي أن $r_2(n)$ هي عبارة عن مجموعة الأزواج (a,b) بحيث $n = a^2 + b^2$ ، و $a,b \in \mathbb{Z}$.

مثلاً $r_2(5) = 8$ ، إذ أن $5 = (\mp 2)^2 + (\mp 1)^2 = (\mp 1)^2 + (\mp 2)^2$.

لدينا $2K/\pi = \theta_3^2$. لكن:

$$\theta_3^2 = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{l^2}\right) = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} q^{k^2+l^2} = \sum_{q,l\in\mathbb{Z}} q^{k^2+l^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k^2+l^2=n} q^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} r_2(n)q^n$$

و منه:

$$2K/\pi = \sum_{n=0}^{\infty} r_2(n)q^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_2(n)q^n \qquad .... (4.97)$$

من (4.96) و (4.97) نجد أن $r_2(n) = 4\delta(n)$.

و بذلك نكون قد توصلنا إلى النتيجة التي تنص على أنه إذا كان $n \geq 1$ فإن $r_2(n) = 4\delta(n)$. ([3],pp.55) .

و قد اكتشف فيرما أن كل عدد أولي من الشكل $4n+1$ مثل $5,13,17,29,37,41,\ldots$. يكتب على شكل مجموع مربعين. حيث:

$$5 = 1^2 + 2^2, 13 = 2^2 + 3^2, 17 = 1^2 + 4^2, 29 = 2^2 + 5^2, 37 = 1^2 + 6^2, 41 = 4^2 + 5^2$$

و كل عدد أولي من الشكل $4n+3$ لا يمكن كتابته على شكل مجموع مربعين .
و هذا واضح لأنه مهما يكن $m \in \mathbb{Z}$. فإن $m^2 \equiv 0 \text{ or } 1 (\mod 4)$.
و بالتالي إذا استطعنا كتابة $4n+3$ على شكل مجموع مربعين ، أي $4n+3 = k^2+l^2$ حيث $k, l \in \mathbb{Z}$.
فإن: $k^2+l^2 \not\equiv 3(\mod 4)$ ، لكن $4n+3 \equiv 3(\mod 4)$ ، و هذا تناقض. ([3],pp.55).
من جهة ثانية لدينا:

$$\theta_3(z,q) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}e^{-2iz}\right)\left(1+q^{2n-1}e^{2iz}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2niz}$$

بوضع $0 \neq w = e^{2iz}$. نجد أن:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}w^{-1}\right)\left(1+q^{2n-1}w\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} w^n \quad .... \ (4.98)$$

تدعى الصيغة (4.98) بمطابقة الجداء الثلاثي لجاكوبي (Jacobi's triple product identity).
و لهذه الصيغة تطبيقات حسابية هامة في نظرية الأعداد.

(4.10.2) كتابة الأعداد الصحيحة الموجبة على شكل مجموع أربع مربعات لأعداد صحيحة:
ليكن $\tau = iK'/K$ ، و $0 < k < 1$ ، و لنأخذ الدوال:

$$f_\alpha(z|\tau) = \theta_1'\theta_\alpha(z|\tau)/\theta_\alpha\theta_1(z|\tau) \ ; \ \alpha = 2,3,4 \quad .... \ (4.99)$$

باعتبار أن الدوال $f_\alpha(z|\tau)$[1] تتبع لـ z (τ ثابت) ، نجد أن النقاط $z \equiv 0(\mod \pi, \pi\tau)$ هي أقطاب بسيطة لـ $f_\alpha(z|\tau)$ ، و $\operatorname{Res}\left(f_\alpha(z|\tau);0\right) = \left(\theta_1'/\theta_\alpha\right)\left(\theta_\alpha(0|\tau)/\theta_1'(0|\tau)\right) = 1$

و نلاحظ أن الثابت θ_1'/θ_α تم اختياره بحيث يكون $\operatorname{Res}\left(f_\alpha(z|\tau);0\right)$ مساوياً للواحد .
كما أن الدوال $f_\alpha(z|\tau)$ هي دوال ميرومورفية و مزدوجة الدورية ، حيث أن:

$$f_\alpha(z+\pi|\tau) = \mp f_\alpha(z|\tau) \ , \ f_\alpha(z+\pi\tau|\tau) = \mp f_\alpha(z|\tau)$$

و بالتالي فهي دوال ناقصية.
كما أن $f_\alpha^2(z|\tau)$ هي دوال ناقصية بالأدوار $\pi, \pi\tau$ ، أقطابها من المرتبة الثانية و هي نفسها أقطاب $f_\alpha(z|\tau)$.

و من العلاقات (4.20) ، (4.21) ، (4.22) ، (4.23)، و العلاقتين $\theta_1' = \theta_2\theta_3\theta_4$, $\theta_3^2 = 2K/\pi$. نجد أن:

$$f_2(z|\tau) = \left(2K/\pi\right)\left(cn\left(2Kz/\pi\right)/sn\left(2Kz/\pi\right)\right)$$

$$f_3(z|\tau) = \left(2K/\pi\right)\left(dn\left(2Kz/\pi\right)/sn\left(2Kz/\pi\right)\right)$$

$$f_4(z|\tau) = \left(2K/\pi\right)\left(1/sn\left(2Kz/\pi\right)\right)$$

و بوضع $C_{\alpha\beta} = f_\alpha^2(z|\tau) - f_\beta^2(z|\tau)$ حيث أن $\alpha, \beta \in \{2,3,4\}$ و $\alpha \neq \beta$.
فإننا نجد أن $C_{\alpha\beta}$ هي دالة(بـ z) مزدوجة الدورية بالأدوار $\pi, \pi\tau$ ، تحليلية عند النقاط $z \equiv 0(\mod \pi, \pi\tau)$.
و بالتالي فهي دالة صحيحة . و منه حسب مبرهنة ليوفيل ستكون ثابتة. حيث أن:

$$C_{\alpha\beta} = \left(\theta_\alpha''/\theta_\alpha\right) - \left(\theta_\beta''/\theta_\beta\right) \quad .... \ (4.100)$$

و $\theta_\alpha'' = \theta_\alpha''(0|\tau)$.
لدينا: $C_{42} = f_4^2(z|\tau) - f_2^2(z|\tau) = \left(2K/\pi\right)^2 = \theta_3^4$. و بما أن:

$$\theta_3 = \theta_3(0|\tau) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{m^2}$$

[1] هنا يجب التفريق بين هذه الدوال و بين الدوال و التي عرفناها في (4.9.6)

فإن: $q^{m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2}$ $\theta_3^4=\sum_{m_1,m_2,m_3,m_4\in\mathbb{Z}}$.

و باعتبار أن $r_4(n)$ ، حيث $n\geq 1$ ،هي عدد التمثيلات أو عدد الطرق التي يمكن بها كتابة العدد n على شكل مجموع أربع مربعات لأعداد صحيحة مع الأخذ باختلاف ترتيب و إشارات هذه الأعداد بعين الإعتبار في العد، أي:

$$r_4(n)=\left|\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4;a^2+b^2+c^2+d^2=n\right\}\right|$$

فإن:

$$\theta_3^4=1+\sum_{n=1}^{\infty}r_4(n)q^n \qquad .... \ (4.101)$$

و من الفقرة (4.1.7) نجد أن (4.100) تصبح بالشكل:

$$C_{\alpha\beta}=\frac{4i}{\pi}\left[\frac{(\partial/\partial\tau)\theta_\alpha(0|\tau)}{\theta_\alpha(0|\tau)}-\frac{(\partial/\partial\tau)\theta_\beta(0|\tau)}{\theta_\beta(0|\tau)}\right]$$

$$=\frac{4i}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\log\left(\frac{\theta_\alpha(0|\tau)}{\theta_\beta(0|\tau)}\right) \qquad .... \ (4.102)$$

لكن بما أن $q=e^{\pi i\tau}$.فإن: $\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial\tau}=\pi iq\frac{\partial}{\partial q}$. و بالتالي فإنه من (4.102) ينتج أن:

$$C_{42}=4q\frac{\partial}{\partial q}\log\frac{\theta_2(0,q)}{\theta_4(0,q)} \qquad .... \ (4.103)$$

إلا أنه من العلاقات (4.24) نجد أن:

$$\frac{\theta_2(0,q)}{\theta_4(0,q)}=2q^{1/4}\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2m}\right)^2}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2m-1}\right)^2}=2q^{1/4}\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2m}\right)^2}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2m}\right)^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2m-1}\right)^2}$$

$$=2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{4m}\right)^2\Big/\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^m\right)^2$$

و بالتالي فإن (4.103) تصبح بالشكل:

$$C_{42}=4q\frac{\partial}{\partial q}\left[\log(8q)^{1/4}+\sum_{m=1}^{\infty}\log\left(1-q^{4m}\right)^2-\sum_{m=1}^{\infty}\log\left(1-q^m\right)^2\right]$$

$$=4q\left[(1/4q)+2\sum_{m=1}^{\infty}-4mq^{4m-1}\big/\left(1-q^{4m}\right)-2\sum_{m=1}^{\infty}\left(-mq^{m-1}\right)\big/\left(1-q^m\right)\right]$$

$$=1+8\left[\sum_{m=1}^{\infty}mq^m\big/\left(1-q^m\right)-\sum_{m=1}^{\infty}4mq^{4m}\big/\left(1-q^{4m}\right)\right]$$

$$=1+8\sum_{m=1,m\neq 0(\mathrm{mod}\,4)}mq^m\big/\left(1-q^m\right)=1+8\sum_{m=1,m\neq 0(\mathrm{mod}\,4)}m\left(\sum_{l=1}^{\infty}q^{ml}\right)$$

$$=1+8\sum_{r=1}^{\infty}q^r\left(\sum_{m|r,4\nmid m}m\right) \qquad .... \ (4.104)$$

و بما أن $C_{42}=\theta_3^4$. فإنه من (4.101) و (4.104) نجد أنه:

$$\forall n\geq 1;r_4(n)=8\sum_{d|n,4\nmid d}d$$

و من هنا نجد أنه إذا كان n عدداً فردياً ، و منه قواسم n هي أعداد فردية و العدد 4 لا يقسم هذه القواسم. فإن:

$$r_4(n) = 8\sum_{d|n,4\nmid d} d = 8\sum_{d|n,d \text{ odd}} d$$

أي أن $r_4(n)$ سيكون مساوياً للعدد 8 مضروباً بمجموع القواسم الفردية للعدد n ، و إذا كان n عدداً زوجياً

فإن: $r_4(n) = 24\sum_{d|n,\, d \text{ odd}} d$

أي أن $r_4(n)$ سيكون مساوياً للعدد 24 مضروباً بمجموع القواسم الفردية للعدد n .

و بذلك نكون قد عرضنا إثبات للمبرهنة التالية ، و التي تعود لجاكوبي.

مبرهنة:

إن العدد $r_4(n)$ ، حيث $n \geq 1$ ، يساوي إلى جداء العدد 8 بمجموع القواسم الفردية للعدد n ، عندما يكون n عدداً فردياً . ويساوي إلى جداء العدد 24 بمجموع القواسم الفردية للعدد n ، عندما يكون n زوجياً .

و قد تمكن لاغرانج من استنتاج النتيجة الهامة التالية و التي تنص على أن:

" كل عدد صحيح موجب هو مجموع أربع مربعات لأعداد صحيحة " ([3],pp.128).

أمثلة: $r_4(101) = 816$. أي أنه يمكننا كتابة العدد 101 على شكل مجموع أربع مربعات لأعداد صحيحة بـ 816 طريقة.

لكن يوجد خمس تمثيلات للعدد 101 على شكل مجموع أربع مربعات مختلفة بشكل أساسي ، و هي:

$$101 = 1^2 + 10^2 + 0^2 + 0^2 = 1^2 + 6^2 + 8^2 + 0^2 = 2^2 + 4^2 + 9^2 + 0^2$$

$$= 4^2 + 6^2 + 7^2 + 0^2 = 2^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2$$

(للإطلاع أكثر يمكن العودة إلى الصفحات 273 و 276 من المرجع التالي:

(Emil Grosswald,1984,Topics from the Theory of Numbers

(4.10.3) الأعداد المُخمّسة: pentagonal numbers [16]

الأعداد المُخمّسة هي الأعداد الصحيحة الموجبة n التي لها الشكل:

$n = k(3k-1)/2$ ، أو $n = k(3k+1)/2$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

مثل الأعداد 0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22 ,26 , 35, …

(4.10.4) مبرهنة:

من أجل[1] $x \neq 0$ و $|x| < 1$. يكون:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{n(3n+1)/2} \qquad \text{....................} \ (4.105)$$

(4.10.5) تعريف:

ندعو عدد التمثيلات للعدد الصحيح الموجب n بالشكل $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_r$.

حيث أن $a_j \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq a_j$ و $a_j \leq n$ ، مع عدم الأخذ بترتيب الأعداد a_j بعين الإعتبار في العد، بعدد التجزئات غير المحددة للعدد n (the number of unrestricted partitions).

و يُرمز لهذا العدد بـ $p(n)$. و تُدعى $p(n)$ بدالة التجزئة غير المحددة (unrestricted partition function)، أو اختصاراً دالة التجزئة. و الأعداد a_j تدعى بالأجزاء (parts) .

فمثلاً 1+1+1+1+1=1+1+1+2=1+2+2=1+1+3=2+3 =1+4 =5 . أي $p(5) = 7$.

لنرمز بـ $p_e(n)$ لعدد التجزئات للعدد n إلى عدد زوجي من الأجزاء غير المتساوية ، و بـ $p_o(n)$ لعدد التجزئات للعدد n إلى عدد فردي من الأجزاء غير المتساوية.

---

[1] الصيغة (4.105) تدعى بصيغة أولر للأعداد المخمسة (Euler's formulae for the pentagonal numbers)

مثلاً $p_e(7)=3$ حيث أن 3+4=2+5=1+6 :7 ، و $p_o(7)=2$ ، حيث 1+2+4 =7 :7 .

و قد أثبت أولر أنه إذا كان $n=k(3k\mp 1)/2$ (أي إذا كان عدد مُخمّس) فإن $p_e(n)-p_o(n)=(-1)^k$.

و أنه إذا كان $n\geq 0$ ليس عدداً مُخمّساً فإن $p_e(n)-p_o(n)=0$.

و قد أثبت أولر أيضاً أن:

$$|x|<1\ ;\ \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$$

و قد تمكن Macmahon من الحصول على قائمة بقيم $p(n)$ من أجل $n\leq 200$. و وجد أن:

$$p(200)=3972\,999\,029\,388 \quad , \quad p(100)=190\,569\,292$$

و تمكن D.H.Lehmer في عام 1936 من حساب $p(14031)$ و كان الناتج مكون من 127 منزلة.

ملاحظة:

للاستزادة و الإطلاع على فقرات (4.10) يمكن العودة إلى المرجع [16] ، و إلى:

(1) Apostol,T.M.,1976, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag.
(2) Natha J.Fine , Januery 1990, Basic Hypergeometric Series and Applications, Amer. Math. Monthly ,vol.97,number 1, pp.82-88.

"الفصل الخامس"

دالة وايرشتراوس الناقصية
The Weierstrass Elliptic Function

في عام 1862 قدم وايرشتراوس دالته الشهيرة:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda'} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

و التي تُعرف باسم دالة وايرشتراوس الناقصية . و لهذه الدالة دور هام و كبير في نظرية الدوال الناقصية ، و هي التي مكنت من الإجابة عن السؤال التالي:
هل توجد دالة ناقصية من المرتبة الثانية أقطابها فقط عند نقاط الشبكة Λ ؟
و أهمية هذه الدالة تأتي من أن كل دالة ناقصية شبكة الدور لها Λ ، هي عبارة عن دالة كسرية بـ $\wp$ و $\wp'$ حيث أن $\wp'(z) = \frac{d}{dz}\wp(z)$.

و سنأتي في هذا الفصل على دراسة ثلاث فقرات أساسية . أولها بناء دالة وايرشتراوس الناقصية و أهم العلاقات و الخصائص التي تحققها و العلاقة بينها و بين دوال جاكوبي الناقصية ، و ثانيها دراسة الدوال و الأشكال المعيارية ، و ثالثها دراسة مسألة العكس في نظرية الدوال الناقصية .
و سنعتمد في هذا الفصل بأكمله على أن Λ عبارة عن المجموعة $\Lambda = \{mw_1 + nw_2 ; m,n \in \mathbb{Z}\}$
بحيث $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ و $\mathrm{Im}(w_2/w_1) > 0$ ، و $\Lambda' = \Lambda \setminus \{0\}$.
و في دراستنا في هذا الفصل تم الاعتماد على المراجع التالية:
2 ,3 ,6 ,11 ,12 ,18 ,21 ,25 ,26 ,30 ,32 ,33, 37 ,38 ,39 ,40 ,44, 47, 48, 54

(5.1) دالة وايرشتراوس الناقصية:

(5.1.1) تعريف:
لتكن $\Lambda = \{mw_1 + nw_2 ; m,n \in \mathbb{Z}\}$. تُعرّف دالة وايرشتراوس الناقصية بالشكل:

$$\wp(z,\Lambda) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda'} \left[\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

و سنكتب $\wp(z)$ بدلاً من $\wp(z,\Lambda)$ إن أمن الالتباس .
سنبين أن هذه الدالة هي بالفعل دالة ناقصية ، بالأدوار w_1, w_2 ، زوجية ، من المرتبة الثانية ،حيث أن أقطابها من المرتبة الثانية عند نقاط الشبكة Λ ، و كذلك مشتقها هو دالة ناقصية بالأدوار w_1, w_2 ، فردية ، أقطابها من المرتبة الثالثة عند نقاط الشبكة Λ .
و سنأتي على إثبات ذلك بعد التوطئتين التاليتين.

(5.1.2) توطئة:

لتكن $\lambda > 0$. المتسلسلة $\sum_{w\in\Lambda'} \frac{1}{w^{\lambda}}$ متقاربة بالإطلاق عندما $\lambda > 2$ و متباعدة عندما $\lambda \leq 2$.

(5.1.3) توطئة:

المتسلسلة $\sum_{w\in\Lambda'} \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}$ متقاربة بالنظيم في $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

⊛ حسب الملاحظة (0.2.7) و المبرهنة (0.2.8) نجد أن المتسلسلة $\sum_{w\in\Lambda'} \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}$ تمثل دالة تحليلية على $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ ، و يكون $\frac{d}{dz}\left(\sum_{w\in\Lambda'} \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right) = -2\sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$.

و المتسلسلة $\sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$ ستكون أيضاً متقاربة بالنظيم في $\mathbb{C} \setminus \Lambda$.

و بالتالي فإن الدالة $f(z) = \sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$ هي عبارة عن دالة ميرومورفية في $\mathbb{C}$ أقطابها من المرتبة الثالثة عند نقاط الشبكة Λ .

و الدالة $\wp(z)$ ميرومورفية في $\mathbb{C}$ أقطابها من المرتبة الثانية عند نقاط الشبكة Λ .

الدالة $f(z)$ مزدوجة الدورية بالأدوار w_1, w_2 لأن:

$$f(z+w_1) = \sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-w+w_1)^3} = \sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-(w-w_1))^3}$$

إلا أن مجموعة الأعداد $w - w_1$ متطابقة مع مجموعة كل الأعداد w لأن التحويل $w \to w - w_1$ يمثل إزاحة لكل المستوي بالشعاع w_1 و يأخذ شبكة النقاط Λ إلى نفسها .

لذلك فإن المتسلسلتين $\sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$ و $\sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-(w-w_1))^3}$ تختلفين فقط في ترتيب الحدود. و بما أن مجموع المتسلسلة المتقاربة بالإطلاق مستقل عن ترتيب حدودها، فإن $f(z+w_1) = f(z)$

و بالمثل نجد أن $f(z+w_2) = f(z)$.

كما أن الدالة $f(z)$ هي دالة فردية لأن:

$$f(-z) = \sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(-z-w)^3} = \sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{-(z-(-w))^3} = -f(z)$$

حيث أن التحويل $w \to -w$ لا يؤثر على مجموع المتسلسلتين $\sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-(-w))^3}, \sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$ المتقاربتين بالإطلاق .

إلا أن: $\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + \sum_{w\in\Lambda'} \frac{-2}{(z-w)^3} = -\sum_{w\in\Lambda} \frac{2}{(z-w)^3} = -2f(z)$

و بالتالي فإن $\wp'(z)$ هي دالة ناقصية بالأدوار w_1, w_2 ، فردية ، أقطابها من المرتبة الثالثة عند نقاط Λ .

و $\wp(z)$ زوجية لأن:

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w\in\Lambda'} \left[\frac{1}{(z-(-w))^2} - \frac{1}{(-w)^2}\right]$$

و بما أن التحويل $w \to -w$ لا يؤثر على المجموع إنما يؤثر على ترتيب الحدود فإن $\wp(-z) = \wp(z)$.

⊛ لنثبت الآن أن الدالة $\wp(z)$ مزدوجة الدورية بالأدوار w_1,w_2 .

لدينا $\wp'(z+w_1)=\wp'(z)$ و منه:

$$h'(z):=\wp'(z+w_1)-\wp'(z)=0 \qquad ; \forall z\in\mathbb{C}\setminus\Lambda$$

و بالتالي $h(z)=\wp(z+w_1)-\wp(z)=c$ حيث c ثابت .

بأخذ $z=-w_1/2$ نجد أن: $\wp(w_1/2)-\wp(-w_1/2)=c$ ، لكن $\wp(z)$ دالة زوجية و منه فإن $c=0$.

أي $\wp(z+w_1)=\wp(z)$ ، و بالمثل نجد أن $\wp(z+w_2)=\wp(z)$.

و مما سبق نجد أن الدالة $\wp(z)$ ناقصية بالأدوار w_1,w_2 ، زوجية ، من المرتبة الثانية ، أقطابها مضاعفة عند نقاط الشبكة Λ ، و كذلك مشتقها $\wp'(z)$ هو دالة ناقصية بالأدوار w_1,w_2 ، فردية ، أقطابها من المرتبة الثالثة عند نقاط Λ .

دالة وايرشتراوس سيكما و دالة وايرشتراوس زيتا: Weierstrass sigma and zeta functions

(5.1.4) تعريف:

تُعرّف الدالة $\sigma(z)$ و التي تدعى بدالة وايرشتراوس سيكما بالشكل:

$$\sigma(z)=z\prod_{w\in\Lambda'}\left(1-\frac{z}{w}\right)\exp\left(\left(z/w\right)+\frac{1}{2}\left(z/w\right)^2\right)$$

نلاحظ أن هذه الدالة تعتمد على الشبكة Λ ، و لذلك فإننا نكتب $\sigma(z)=\sigma(z,\Lambda)=\sigma(z;w_1,w_2)$

(5.1.5) مبرهنة:

الدالة $\sigma(z)$ هي دالة صحيحة ، أصفارها بسيطة عند نقاط الشبكة Λ .

الإثبات:

نعلم أنه إذا كانت $0\neq b_n\in\mathbb{C}$ من أجل كل n ، عندئذ فإن الجداء $\prod_{n=0}^{\infty}b_n$ متقارب إذا و فقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}Log\, b_n$ متقاربة . حيث أن اللوغاريتم هنا هو اللوغاريتم الرئيسي[1] .

لنعتبر $g(w)=g(w,z)=\left(1-\frac{z}{w}\right)\exp\left(\left(z/w\right)+\frac{1}{2}\left(z/w\right)^2\right)$ ، و ليكن $w\in\Lambda$ بحيث:

$$\sum_{w\in\Lambda'}Log\, g(w,z)=\sum_{|w|\le 2|z|,\, w\neq 0}Log\, g(w,z)+\sum_{|w|>2|z|,\, w\neq 0}Log\, g(w,z)$$

لدينا في المجموع الثاني من الطرف الأيمن:

$$\begin{aligned}
\left|Log\, g(w,z)\right| &= \left|Log\left(1-\frac{z}{w}\right)+\frac{z}{w}+\frac{1}{2}\left(z/w\right)^2\right| \\
&= \left|-\frac{z}{w}+\frac{1}{2}\left(z/w\right)^2-\frac{1}{3}\left(z/w\right)^3-\frac{1}{4}\left(z/w\right)^4-\ldots+\left(z/w\right)+\frac{1}{2}\left(z/w\right)^2\right| \\
&\le \frac{1}{3}|z/w|^3\left(1+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}(1/2)^2+\frac{3}{6}(1/2)^3+\ldots\right) \\
&< \frac{1}{3}|z/w|^3\left(1+\frac{1}{2}+(1/2)^2+(1/2)^3+\ldots\right)<\frac{2}{3}|z/w|^3<\left(|z/w|\right)^3
\end{aligned}$$

و بما أن المتسلسلة $\sum_{w\in\Lambda'}w^{-3}$ متقاربة بالإطلاق، التوطئة (5.1.2)، فإن $\sum_{w\in\Lambda'}Log\, g(w,z)$ متقاربة بالإطلاق، حسب معيار المقارنة.

---

[1] أنظر [12],pp.83

و إذا كانت $A \subseteq \mathbb{C}$ مجموعة متراصة، فإنه يوجد $0 \neq M \in \mathbb{R}$ بحيث $|Log\ g(w,z)| < (M/|w|)^3$

و منه فإن الجداء $\prod_{w\in\Lambda'} g(w,z)$ متقارب بانتظام في كل مجموعة متراصة جزئية من $\mathbb{C}$، و الدالة $\sigma(z)$ صحيحة.

و أصفار $\sigma(z)$ بسيطة عند نقاط الشبكة Λ ($z \equiv 0(\text{mod}\ \Lambda)$) . حيث أن $\sigma(0)=0$ و

$$\sigma'(0) = \lim_{z\to 0}\left(\sigma(z)/z\right) = \prod_{w\in\Lambda'}\lim_{z\to 0}\left(1-\frac{z}{w}\right)\exp\left(\frac{z}{w}+\frac{1}{2}(z/w)^2\right) = 1 \neq 0$$

⊛ الدالة $\sigma(z)$ فردية، حيث أن:

$$-\sigma(-z,\Lambda) = z\prod_{w\in\Lambda'}\left(1-\frac{z}{-w}\right)\exp\left(\frac{z}{-w}+\frac{1}{2}(z/w)^2\right)$$

لكن التحويل $w \to -w$ يأخذ الشبكة Λ إلى نفسها. و لدينا الجداء متقارب بالإطلاق و بالتالي فإن هذا التحويل لن يؤثر على قيمة هذا الجداء، إنما يؤثر فقط على ترتيب حدوده و بالتالي فإن $\sigma(-z) = -\sigma(z)$.

⊛ وتحقق أنه: $\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\ ;\ \sigma(\lambda z,\lambda\Lambda) = \lambda\sigma(z,\Lambda)$

ملاحظة: ندعو

$$\sigma(1/2;1,i) = \frac{1}{2}\prod_{(m,n)\neq(0,0)}\left(1-\frac{1}{2(m+ni)}\right)\exp\left(\frac{1}{2(m+ni)}+\frac{1}{8(m+ni)^2}\right)$$
$$= \frac{2^{5/4}\sqrt{\pi}\,e^{\pi/8}}{\Gamma^2(1/4)} = 0.4749493799...$$

بثابت وايرشتراوس[1].

⊛ لدينا $\frac{\sigma(z)}{z} = \prod_{w\in\Lambda'}\left(1-\frac{z}{w}\right)\exp\left(\frac{z}{w}+\frac{1}{2}(z/w)^2\right)$ ، و الجداء متقارب بانتظام في كل مجموعة متراصة جزئية من $\mathbb{C}$، (المبرهنة 5.1.5) ، و بالتالي فإنه بأخذ لوغاريتم الطرفين (اللوغاريتم الرئيسي)، و بالإشتقاق نجد أن: $-\frac{1}{z}+\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \sum_{w\in\Lambda'}\left(\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right)$

و منه: $\frac{\sigma'(z,\Lambda)}{\sigma(z,\Lambda)} = \frac{1}{z}+\sum_{w\in\Lambda'}\left(\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right)$

(5.1.6) تعريف:

تُعرّف الدالة $\zeta(z)$ و التي تدعى بدالة وايرشتراوس زيتا بالشكل:

$$\zeta(z) = \zeta(z,\Lambda) = \frac{\sigma'(z,\Lambda)}{\sigma(z,\Lambda)} = \frac{1}{z}+\sum_{w\in\Lambda'}\left(\frac{1}{z-w}+\frac{1}{w}+\frac{z}{w^2}\right) \quad .... (5.1)$$

المتسلسلة في هذا التعريف متقاربة بالإطلاق في $\mathbb{C}\setminus\Lambda$ ، و بانتظام[2] في كل مجموعة متراصة جزئية من $\mathbb{C}$.

(5.1.7) مبرهنة:

الدالة $\zeta(z)$، فردية ، ميرومورفية في $\mathbb{C}$، أقطابها بسيطة عند نقاط Λ ، و تحقق أنه:

$$\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\ ;\ \zeta(\lambda z,\lambda\Lambda) = \lambda^{-1}\zeta(z,\Lambda)$$

---

[1] أنظر المرجع التالي صفحة 421 :
Steven R.Finch , 2003 , mathematical Constants ,Cambridge University Press

[2] أنظر [21],pp.403

(5.1.8) ملاحظة:

باشتقاق المتسلسلة (5.1) حداً حداً نجد أن: $\zeta'(z,\Lambda) = -\wp(z,\Lambda)$ ، و منه:

$$\wp(z,\Lambda) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\sigma'(z,\Lambda)}{\sigma(z,\Lambda)}\right) = \frac{\sigma'^2(z) - \sigma(z)\sigma''(z)}{\sigma^2(z)}$$

(5.1.9) الخصائص الدورية للدالتين وايرشتراوس سيكما و وايرشتراوس زيتا:

لدينا $\zeta'(z) = -\wp(z)$ ، و منه $\zeta(z) = -\int \wp(z)\,dz + c$ ، حيث c ثابت.

و كذلك $\zeta'(z+w) = -\wp(z+w)$ ، و منه $\zeta(z+w) = -\int \wp(z+w)\,dz + \varphi(w)$

و لدينا $\forall w \in \Lambda ; \wp(z+w) = \wp(z)$ ، و بالتالي فإنه بمكاملة الطرفين نجد:

$$-\zeta(z+w) + \varphi(w) = -\zeta(z) + c$$

أي:

$$\zeta(z+w) = \zeta(z) + \eta(w) \qquad .... \quad (5.2)$$

حيث أن $\eta = \eta(w) := \varphi(w) - c$. لتكن $w' \in \Lambda$ عندئذ فإن:

$$\zeta(z+w+w') = \zeta(z+w) + \eta(w') = \zeta(z) + \eta(w) + \eta(w') \qquad .... \quad (5.3)$$

باستخدام (5.2) مرة أخرى نجد أن:

$$\zeta(z+w+w') = \zeta(z) + \eta(w+w') \qquad .... \quad (5.4)$$

من (5.3) و (5.4) نجد أن:

$$\eta(w+w') = \eta(w) + \eta(w') \qquad .... \quad (5.5)$$

و منه $\eta(2w) = 2\eta(w)$ ، و بالإستقراء نجد أن $\eta(nw) = n\eta(w)$ حيث $n \geq 1$.

فإذا كانت $\Lambda = \{mw_1 + nw_2 ; m,n \in \mathbb{Z}\}$ ، و بوضع $\eta(w_1) = \eta(w_1,\Lambda) = \eta_1$ و

$\eta(w_2) = \eta(w_2,\Lambda) = \eta_2$. عندئذ فإنه من (5.5) و $\eta(nw) = n\eta(w)$ نجد أن:

$$\eta = \eta(w,\Lambda) = \eta(w) = \eta(mw_1 + nw_2) = m\eta_1 + n\eta_2$$

بأخذ $w_3 = -w_1 - w_2$ (أي $w_1 + w_2 + w_3 = 0$) و بوضع $\eta(w_3) = \eta_3$ ، فإننا نجد أن:

$\eta_3 = \eta(w_3) = \eta(-w_1 - w_2) = -\eta_1 - \eta_2$ ، أي $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$.

من (5.2) لدينا $\eta = \zeta(z+w) - \zeta(z)$ ، حيث أن $w \in \Lambda$ ، فبأخذ $z = (-w/2) \notin \Lambda$ نجد أن

$$\eta = \eta(w,\Lambda) = 2\zeta(w/2)$$

و منه $\zeta(z+w) = \zeta(z) + 2\zeta(w/2)$ ، و بالتالي $\zeta(w/2) \neq 0$ لأنه إذا تحقق العكس فإن الدالة $\zeta(z)$ تصبح ناقصية و هذا غير ممكن.

و بالتالي فإن $\zeta(z+w) = \zeta(z) + \eta$ ، حيث أن $\eta \neq 0$ ، و ذلك مهما تكن $w \in \Lambda$ ، و منه فإن:

$$\zeta(z+w_1) = \zeta(z) + \eta_1 \;\; , \;\; \zeta(z+w_2) = \zeta(z) + \eta_2$$

حيث $\eta_1 = 2\zeta(w_1/2)$, $\eta_2 = 2\zeta(w_2/2)$ ، و واحد على الأقل من η_1, η_2 لا يساوي الصفر و بالتالي $\eta_3 \neq 0$.

لنثبت الآن أنه مهما تكن $w \in \Lambda$ فإن:

$$\sigma(z+w) = \varepsilon(w)\sigma(z)e^{(z+(w/2)).\eta} \;\; ; \eta = \eta(w) \qquad .... \quad (5.6)$$

حيث أن:

$$\varepsilon(w) = \begin{cases} -1 & ; w/2 \notin \Lambda \\ 1 & ; w/2 \in \Lambda \end{cases}$$

لنفرض أولاً أن $z \notin \Lambda$ ، ($\sigma(z) = 0 ; \forall z \in \Lambda$) ، و بمكاملة طرفي العلاقة (5.2) نجد أن:

$$\int_{z_0}^{z} \zeta(z+w)\,dz = \int_{z_0}^{z} \zeta(z)\,dz + (z - z_0).\eta(w)$$

و لدينا $\zeta(z) = \dfrac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \dfrac{d}{dz} Log\,\sigma(z)$ و $\sigma(z) \neq 0$ و بفرض أن $w/2 \notin \Lambda$ نجد أن:

$$Log\ \sigma(z+w)=Log\ \sigma(z)+z\ \eta(w)+c$$

حيث أن c ثابت يعتمد على اختيارنا لـ z_0 ، و بالتالي $\sigma(z+w)=\sigma(z)e^{z\eta+c}$ ، و بأخذ $z=-w/2$

و بما أن $\sigma(z)$ دالة فردية فإننا نجد أن: $\sigma(w/2)=\sigma(-w/2)\cdot e^{c}\cdot e^{(-w/2)\eta}$ ، و منه $e^{c}=-e^{(w/2)\eta}$ ،

و بالتالي فإن: $\sigma(z+w)=-\sigma(z).e^{(z+(w/2)).\eta}$ ، و هذه هي العلاقة (5.6) حيث أن $\varepsilon(w)=-1$.

لنفرض الآن أن[1] $w/2\in\Lambda$.

وجدنا أن $\sigma(z+w)=-\sigma(z).e^{(z+(w/2)).\eta}$ ، بشرط $w/2\notin\Lambda$ ، و منه فإن :

$$\sigma(z+2w)=\sigma(z+w+w)=-\sigma(z+w).e^{(z+w+(w/2)).\eta}=\sigma(z)\cdot e^{2(z+w)\eta}$$

و بالتالي إذا كان $w'=2w$ ، $(w=w'/2)$ ، بحيث $w'/2\notin\Lambda$. عندئذ:

$$\sigma(z+w')=\sigma(z).e^{(z+(w'/2)).\eta'}\qquad ;\ (\eta'=2\eta)$$

و من هنا نجد أن $\sigma(z+w_j)=-\sigma(z).e^{(z+(w_j/2)).\eta_j}$ ، حيث $j=1,2,3$.

و ذلك باعتبار أن الشبكة Λ مولدة بزوج الدور الإبتدائي w_1,w_2 ، أي $w_j/2\notin\Lambda$ و بحيث $\eta_j=\eta(w_j)$.

علاقة ليجاندر[2]:

إن $\eta_2 w_1-\eta_1 w_2=2\pi i$ ، باعتبار أن $\eta(w_1)=\eta_1$ و $\eta(w_2)=\eta_2$.

⊛ من علاقة ليجاندر نجد أن $\eta_1 w_2-\eta_2 w_1=-2\pi i$ ، و بما أن $\eta_1+\eta_2+\eta_3=0$ و $w_1+w_2+w_3=0$

فإن:

$$\eta_3 w_1-\eta_1 w_3=-2\pi i\ ,\ \eta_1 w_3-\eta_3 w_1=2\pi i\ ,\ \eta_3 w_2-\eta_2 w_3=2\pi i\ ,\ \eta_2 w_3-\eta_3 w_2=-2\pi i$$

و بالتالي فإنه يمكننا أن نكتب:

$$\eta_s w_r-\eta_r w_s=\pm 2\pi i\quad ;\ \forall r,s=1,2,3\ ,r\neq s$$

و هذه العلاقة ستفيدنا في إثبات المبرهنة (5.1.27).

نشر لوران للدوال $\wp(z)$ و $\zeta(z)$:

وجدنا أن الدوال $\wp(z)$ و $\zeta(z)$ ميرومورفية في $\mathbb{C}$ أقطابها عند نقاط الشبكة Λ .

سنوجد الآن نشر لوران لهذه الدوال في جوار الصفر، أي النشر لهذه الدوال ضمن الحلقة $0<|z|<r$ ،

حيث $r=\min\{|w|;w\in\Lambda'\}$.

(5.1.10) مبرهنة:

ليكن $0<|z|<r$ ، حيث $r=\min\{|w|;w\in\Lambda'\}$. عندئذ فإن:

$$\zeta(z,\Lambda)=\frac{1}{z}-S_4 z^3-S_6 z^5-\ldots=\frac{1}{z}-\sum_{m=1}^{\infty}S_{2m+2}\,z^{2m+1}\qquad(1)$$

$$\wp(z,\Lambda)=\frac{1}{z^2}+3S_4 z^2+5S_6 z^4+\ldots=\frac{1}{z^2}-\sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)S_{2m+2}\,z^{2m}\qquad(2)$$

حيث أن $S_m=\sum_{w\in\Lambda'}w^{-m}$ ، و هي متسلسلة متقاربة بالإطلاق عندما $m\geq 3$ (التوطئة 5.1.2)، و تدعى

متسلسلة Eisenstein[3] ، من المرتبة m ، و عندما يكون m فردياً فإن $S_m=0$.

---

[1] أنظر [12],pp.103

[2] أنظر [39],pp.405 و [48],pp.446

[3] Ferdinand Gothhold Max Eisenstein (1823-1852)

المعادلة التفاضلية التي تحققها دالة وايرشتراوس الناقصية:

(5.1.11) مبرهنة:

الدالة $\wp(z,\Lambda)$ تحقق المعادلة التفاضلية:

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = 4\left(\wp(z)\right)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \qquad .... \quad (5.7)$$

حيث أن: $g_2 = g_2(\Lambda) = 60S_4 \;,\; g_3 = g_3(\Lambda) = 140S_6$ ، و تدعى باللامتغيرات (invariants) لدالة وايرشتراوس الناقصية.

⊛ و بالعكس إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية:

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2y - g_3 \qquad .... \quad (1)$$

و الأعداد w_1, w_2 محددة بالشكل:

$$g_2 = 60\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(mw_1 + nw_2)^4} \;,\; g_3 = 140\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(mw_1 + nw_2)^6}$$

عندئذ فإن الحل العام للمعادلة **(1)** هو $y = \wp(z + A)$ ، حيث أن A ثابت.

و إذا كان لدينا المعادلة:

$$z = \int_u^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}} \qquad .... \quad (2)$$

و التي تحدد z بدلالة u ، و طريق المكاملة نختاره بحيث لا يمر من أصفار $4t^3 - g_2t - g_3$.

عندئذ فإنه سيكون: $\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = 4u^3 - g_2u - g_3$ ، و منه $u = \wp(z + A)$ ، حيث أن A ثابت.

بجعل $u \to \infty$ فإننا نجد أن $z \to 0$ ، و منه فإن A قطب للدالة $\wp(z)$ أي $A \in \Lambda$ ، و بالتالي فإن $u = \wp(z)$.

و منه فإن المعادلة **(2)** تكافئ $u = \wp(z)$ ، و لذلك فإنه يمكننا أن نكتب:

$$\wp^{-1}(u) = \int_u^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}$$

التكاملات $\int R(x,y)dx$ حيث أن R دالة كسرية بـ x ، y و y^2 هي كثيرة حدود من الشكل $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$. تُدعى بتكاملات وايرشتراوس الناقصية، و التي سندرسها في الفصل السادس.

ملاحظة: [3],pp.166+268

بما أن $\left(\wp'(z)\right)^2 = 4\left(\wp(z)\right)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ ، فإن النقاط $(x,y) = \left(\wp(z), \wp'(z)\right)$ تقع على منحني مُعرّف بالمعادلة التكعيبية التالية $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ ، و الذي يدعى بالمنحني الناقصي (elliptic curve)، و لنظرية المنحنيات الناقصية ـ النظرية التوأم لنظرية الدوال الناقصية ـ أهمية تطبيقية كبيرة في نظرية الأعداد ، و في نظرية التشفير، و قد كانت هذه المنحنيات الأداة الرئيسية لـ Andrew Wiles في إثباته لمبرهنة فيرما الأخيرة و الذي تمكن من إثباتها بشكل كامل في عام 1995 . أنظر:

Andrew Wiles ,1995 , Modular Elliptic Curve and Fermat's Last Theorem , The Annals of Mathematics , Vol.141,No.3,pp.443-551

(5.1.12) تعريف:
لنأخذ $w_1/2\ ,\ w_2/2\ ,\ w_3/2$ حيث أن $w_1+w_2+w_3=0$ ، و التي تشير إلى أنصاف الأدوار لدالة وايرشتراوس الناقصية . تُعرّف الأعداد e_1,e_2,e_3 بالشكل:
$$e_1=\wp(w_1/2)\ ,\ e_2=\wp(w_2/2)\ ,\ e_3=\wp(w_3/2)$$

(5.1.13) مبرهنة:
$\wp'(w_j/2)=0$ حيث $j=1,2,3$ ، و الأعداد $z\equiv(w_j/2)(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ هي أصفار بسيطة للدالة $\wp'(z)$.

ملاحظة:
إن الأعداد e_j $(j=1,2,3)$ مختلفة مثنى مثنى.
حيث أنه بوضع $f_j(z)=\wp(z)-e_j$ $(j=1,2,3)$ ، نجد أن $f_j(z)$ لها قطب من المرتبة الثانية عند النقطة $z=0$ ، و بالتالي فإن لها صفرين في متوازي أضلاع الدور الإبتدائي (إما صفرين بسيطين أو صفر من المرتبة الثانية) ، لكن $w_j/2$ صفر لـ $f_j(z)$ من المرتبة الثانية لأن $f_j{}'(z)=\wp'(z)$ ، و منه:
$$f_j'(w_j/2)=\wp'(w_j/2)=0\quad and\quad f_j''(w_j/2)\neq 0$$
و بالتالي فإن $(w_j/2)\mathrm{mod}\,\Lambda$ هي أصفار $f_j(z)$.
و بالتالي فإن e_1,e_2,e_3 مختلفة مثنى مثنى لأنه إذا فرضنا مثلاً أن $e_1=e_2$ فإن الدالة $f_1(z)=\wp(z)-e_1$ لها صفر من المرتبة الثانية عند $z=w_2/2$ و لدينا $z=w_1/2$ صفراً من المرتبة الثانية لـ $f_1(z)$. و بالتالي فإن مرتبة $f_j(z)$ أكبر أو تساوي 4 ، وهذا غير ممكن.
و بالتالي فإن $e_1\neq e_2$. و بالمثل $e_2\neq e_3,e_1\neq e_3$.

(5.1.14) مبرهنة:
إن $(\wp'(z))^2=4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$ ، حيث أن $e_j=\wp(w_j/2)$ $(j=1,2,3)$.
الإثبات:
لدينا $\wp(z,\Lambda)=\dfrac{1}{z^2}-\sum_{m=1}^{\infty}(2m+1)S_{2m+2}z^{2m}$ (المبرهنة 5.1.10)، و منه:
$$\wp'(z)=-2z^{-3}+O(z)\quad ;\ (z\to 0)$$
و بالتالي: $(\wp'(z))^2=4z^{-6}+O(z^{-2})$
لتكن: $F(z)=f_1(z)/4f_2(z)$ ، حيث أن:
$$f_2(z)=(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)\quad و\quad f_1(z)=(\wp'(z))^2$$
عندئذ فإن $F(z)$ مزدوجة الدورية بالأدوار w_1,w_2 ، و أقطاب $f_1(z)$ هي نقاط الشبكة Λ و هي أقطاب من المرتبة السادسة. و نلاحظ أن النقاط $w_1/2\ ,\ w_2/2\ ,\ w_3/2$ هي أصفارمن المرتبة الثانية للدالة $f_1(z)$، كما أنها أيضاً أصفار لـ $f_2(z)$ ، و من المرتبة الثانية.
و بهذا نجد أن للدالتين $f_1(z)$ و $f_2(z)$ نفس الأدوار و الأقطاب و الأصفار و من نفس المراتب و بالتالي فإن $F(z)$ دالة صحيحة مزدوجة الدورية ، ثابتة ، حسب مبرهنة ليوفيل.
لكن $\lim_{z\to 0}F(z)=1$. لأن $F(z)=(z^6/z^6)F(z)$ ، أي:
$$F(z)=\frac{z^6(\wp'(z))^2}{4(z^2\wp(z)-e_1z^2)(z^2\wp(z)-e_2z^2)(z^2\wp(z)-e_3z^2)}$$
لكن لدينا $(\wp'(z))^2=4z^{-6}+O(z^{-2})$ ، و منه:

$$z^6\left(\wp'(z)\right)^2=4+z^6O(z^{-2})=4+\left(z^4O(z^{-2})/z^{-2}\right)\underset{z\to 0}{\to}4$$

و لدينا $\wp(z)=z^{-2}-\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}z^{2n}$ $\left(b_{2n}=(2n+1)S_{2n+2}\right)$ ، و منه فإن:

$$z^2\wp(z)=1+z^2\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}z^{2n}\underset{z\to 0}{\to}1$$

و بالتالي فإن: $\lim_{z\to 0}F(z)=1$ ، و منه $F(z)=1$ ، أي :

$$\left(\wp'(z)\right)^2=4\left(\wp(z)-e_1\right)\left(\wp(z)-e_2\right)\left(\wp(z)-e_3\right)$$ □

(5.1.15) نتيجة:

لتكن $z\not\equiv\left(w_j/2\right)(\mathrm{mod}\,w_1,w_2)$ حيث أن $j=1,2,3$ ، أي $\wp'(z)\neq 0$. عندئذ فإن:

$$\wp''(z)=6\wp^2(z)-\left(1/2\right)g_2$$

(5.1.16) نتيجة: $e_1+e_2+e_3=0$

الإثبات:

لدينا $\left(\wp'(z)\right)^2=4\left(\wp(z)\right)^3-g_2\wp(z)-g_3$ ، كما أن

$$\begin{aligned}\left(\wp'(z)\right)^2&=4\left(\wp(z)-e_1\right)\left(\wp(z)-e_2\right)\left(\wp(z)-e_3\right)\\&=4\left(\wp^3(z)-(e_1+e_2+e_3)\wp^2(z)+(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)\wp(z)-e_1e_2e_3\right)\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد أن $e_1+e_2+e_3=0$ □

⊛ و أكثر من ذلك فإنه بالمطابقة نجد أيضاً أن:

$$e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3=-g_2/4\quad,\quad e_1e_2e_3=g_3/4$$

كما أنه بأخذ $z=w_j/2\ ;\ (j=1,2,3)$ في المعادلة (5.7) نجد أن $4e_j^3-g_2e_j-g_3=0$

أي أن $e_j\ ;\ (j=1,2,3)$ هي جذور لكثيرة الحدود $4\left(\wp(z)\right)^3-g_2\wp(z)-g_3$ ، و بما أن e_j مختلفة مثنى مثنى فإن المميز(discriminant) لكثيرة الحدود السابقة غير معدوم أي $\Delta=g_2^3-27g_3^2\neq 0$

حيث أنه إذا كان لدينا حدودية (كثيرة حدود) من الشكل $4x^3-ax-b$ جذورها x_1,x_2,x_3 مختلفة مثنى مثنى عندئذ فإن مميزها[1] هو بالتعريف $\Delta:=16\left[(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\right]^2$. فإذا كتبنا[2]:

$$h(x)=4x^3-g_2x-g_3=4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

فإن:

$$h'(e_1)=4(e_1-e_2)(e_1-e_3)\ ,\ h'(e_2)=4(e_2-e_1)(e_2-e_3)\ ,\ h'(e_3)=4(e_3-e_1)(e_3-e_2)$$

و منه فإن: $\Delta=\left(-1/4\right)h'(e_1)h'(e_2)h'(e_3)$ ، لكن بما أن $h'(x)=12x^2-g_2$ ، فإن:

$$\begin{aligned}\Delta&=\left(-1/4\right)\left(12e_1^2-g_2\right)\left(12e_2^2-g_2\right)\left(12e_3^2-g_2\right)\\&=\left(-1/4\right)\left[12^3e_1^2e_2^2e_3^2-12^2\left(e_1^2e_2^2+e_1^2e_3^2+e_2^2e_3^2\right)+12g_2^2\left(e_1^2+e_2^2+e_3^2\right)-g_2^3\right]\end{aligned}$$

لكن: $e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3=-g_2/4$ و $e_1+e_2+e_3=0$

و منه: $e_1^2e_2^2+e_1^2e_3^2+e_2^2e_3^2=g_2^2/16$, $e_1^2+e_2^2+e_3^2=g_2/2$

و بالتعويض نجد المطلوب و هو أن $\Delta=g_2^3-27g_3^2$.

---

[1] أنظر [44],pp.23

[2] أنظر [3],pp.170

بناء الدوال الناقصية:

سنقوم الآن ببناء الدوال الناقصية بمعرفة أقطابها و أصفارها فقط.

وجدنا في المبرهنة (2.3.11) أنه إذا كان لدينا Λ شبكة، أساسها (w_1,w_2) و f دالة ناقصية بحيث تكون $a_1,a_2,...,a_n$ أصفاراً لها ، و $b_1,b_2,...,b_n$ أقطاباً لها (مع أخذ المراتب لهذه الأقطاب و الأصفار بعين الإعتبار في العد). عندئذ فإن:

$$a_1+a_2+...+a_n \equiv b_1+b_2+...+b_n \,(\text{mod}\,\Lambda)$$

لنفرض الآن أنه يوجد لدينا مجموعتين من النقاط $a_1,a_2,...,a_n$ و $b_1,b_2,...,b_n$ ، بحيث:

$$a_1+a_2+...+a_n = b_1+b_2+...+b_n \qquad .... \quad (5.9)$$

و السؤال المطروح ، هل يوجد دالة ناقصية أصفارها $a_1,a_2,...,a_n$ ، و أقطابها $b_1,b_2,...,b_n$ ؟

و هل هذه الدالة وحيدة ؟

إن الإجابة عن هذه الأسئلة تتم بالمبرهنة التالية.

(5.1.17) مبرهنة:

لتكن $a_1,...,a_n$ و $b_1,...,b_n$ أعداداً عقدية تحقق العلاقة (5.9) . عندئذ فإن الدالة:

$$f(z)=\frac{\sigma(z-a_1)\sigma(z-a_2)...\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1)\sigma(z-b_2)...\sigma(z-b_n)}$$

هي دالة ناقصية أصفارها $a_k\,(1\le k\le n)$ و أقطابها $b_k\,(1\le k\le n)$. و الدالة $f(z)$ وحيدة ، بمعنى أنه إذا وُجدت دالة ناقصية أصفارها a_k و أقطابها b_k ، فإنها ستكون جداءً لثابت بالدالة $f(z)$.

(5.1.18) توطئة:

ليكن $0\ne v\in\mathbb{C}$. عندئذ فإن:

$$\forall u\in\mathbb{C};\wp(u)-\wp(v)=\frac{-\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)} \qquad .... \quad (5.10)$$

صيغة الإضافة للدالة $\wp(z)$:

بأخذ المشتق اللوغاريتمي لطرفي (5.10) بالنسبة لـ u (باعتبار أن v ثابت و u متحول). نجد أن:

$$\frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)}=\frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)}-\frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)}-2\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$
$$=\zeta(u-v)+\zeta(u+v)-2\zeta(u) \qquad .... \quad (5.11)$$

باعتبار أن u ثابت و v متحول في (5.10) ، و بأخذ المشتق اللوغاريتمي بالنسبة لـ v ، نجد أن:

$$\frac{\wp'(v)}{\wp(v)-\wp(u)}=\zeta(v-u)+\zeta(u+v)-2\zeta(v) \qquad .... \quad (5.12)$$

وبجمع طرفي (5.11) و (5.12) طرفاً إلى طرف نجد أن:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}=\zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v) \qquad .... \quad (5.13)$$

بأخذ المشتق لطرفي(5.13) بالنسبة لـ u نجد أن:

$$\forall u,v\in\mathbb{C}\ ;\quad \wp(u+v)=\wp(u)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right) \qquad .... \quad (5.14)$$

ندعو (5.13) بصيغة الإضافة لدالة وايرشتراوس زيتا، و الصيغة (5.14) هي إحدى أشكال صيغ الإضافة لدالة وايرشتراوس الناقصية $\wp(z)$ ، حيث أنه يوجد لها شكل آخر موضح في المبرهنة التالية:

(5.1.19) مبرهنة:
لتكن $\wp(z)=\wp(z,\Lambda)$. من أجل أي عددين عقديين u,z بحيث $z\not\equiv \pm u \pmod{\Lambda}$ ، و $z,u\notin\Lambda$ ، يكون:

$$\wp(z+u)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2-\wp(z)-\wp(u) \qquad \text{............} \quad (5.15)$$

الإثبات:
لدينا $z,u\not\in\Lambda$ و $z\not\equiv u \pmod{\Lambda}$ ، أي $\wp(z)\neq\wp(u)$ ، و منه فإن جملة المعادلتين:

$$\wp'(z)=A\,\wp(z)+B \quad , \quad \wp'(u)=A\,\wp(u)+B$$

تحدد و بشكل وحيد A و B . أي:

$$A=\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)} \quad , \quad B=\frac{\wp(z)\wp'(u)-\wp(u)\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(u)} \qquad \text{...........} \quad (5.16)$$

و منه فإن الدالة الناقصية $\wp'(w)-A\wp(w)-B$ تملك على الأقل صفرين مختلفين - في متوازي أضلاع الدور- مطابقين لـ z و u بالمقاس Λ .
و بما أن الدالة $\wp'(z)$ من المرتبة الثالثة فإن الصفر الثالث لها سيكون مطابقاً لـ $-z-u$ بالمقاس Λ (حسب المبرهنة (2.3.9) و المبرهنة (2.3.11)) . (يمكن للصفر $-z-u$ أن يكون مطابقاً لـ z أو u بالمقاس Λ ، أو أن تكون هذه الأصفار الثلاثة أصفاراً بسيطة) .
و بما أن الدالة $\wp$ دالة زوجية فإن $\wp(-z-u)=\wp(z+u)$ ، و لدينا $\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3$
و منه فإن للمعادلة $4x^3-(Ax+B)^2-g_2x-g_3=0$ ، ثلاثة جذور هي $\wp(z),\wp(u),\wp(z+u)$
و بالتالي فإن:

$$4x^3-(Ax+B)^2-g_2x-g_3=4\big(x-\wp(z)\big)\big(x-\wp(u)\big)\big(x-\wp(z+u)\big)$$

بالمطابقة بين أمثال x^3 في الطرفين يكون لدينا:

$$A^2/4=\wp(z+u)+\wp(z)+\wp(u)$$

إلا أنه من (5.16) نجد أن: $A^2=\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2$ و بالتالي فإن:

$$\wp(z+u)=\frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right)^2-\wp(z)-\wp(u)$$ □

حقل الدوال الناقصية:
لتكن $\Lambda=\left\{mw_1+nw_2\,;m,n\in\mathbb{Z},\operatorname{Im}\left(w_2/w_1\right)>0\right\}$ ، و سنعتمد في هذه الفقرة أنه عند ذكر دالة ناقصية فإننا نعني بها دالة ناقصية بالنسبة لشبكة الدور Λ ما لم نذكر خلاف ذلك.
نعلم أنه إذا كان f و g دالتين ناقصيتين فإن $f+g\ ,\ f-g\ ,\ fg\ ,\ f/g\ \ (g\not\equiv 0)$ هي دوال ناقصية، أي أن مجموعة الدوال الناقصية (بالنسبة للشبكة Λ) تشكل حقلاً . سنرمز لهذا الحقل بـ $E(\Lambda)$.
لنرمز بـ $E_{even}(\Lambda)$ لمجموعة كل الدوال الناقصية الزوجية، و بذلك ستكون $E_{even}(\Lambda)$ حقل جزئي من $E(\Lambda)$.
و باعتبار أن الدوال الثابتة هي دوال ناقصية عندئذ فإن التطبيق $\mathbb{C}\to E(\Lambda)$ ، و الذي يقرن كل عدد عقدي $c\in\mathbb{C}$ بدالة ناقصية ثابتة مساوية لـ c ، سيكون تماثلاً (isomorphism) و سوف نعتبر (إن أمن الالتباس) أن الحقل $\mathbb{C}$ هو حقل الدوال الناقصية الثابتة.
و بما أن $\wp(z,\Lambda)=\wp(z)\in E_{even}(\Lambda)$ ، فإن $E_{even}(\Lambda)$ تحوي كل الدوال الكسرية[1] بـ $\wp$ و بمعاملات من $\mathbb{C}$. و هذه الدوال تشكل حقلاً نرمز له بـ $\mathbb{C}(\wp)$ ، أي:

$$\mathbb{C}(\wp)=\{g\,;g=R(\wp)\}$$

حيث أن R دالة كسرية بـ $\wp$ و بمعاملات من $\mathbb{C}$ ، و هذا الحقل هو أصغر حقل يحوي الدالة $\wp$ و الدوال الثابتة $\mathbb{C}$.

---

[1] الدالة الكسرية نعني بها الدالة التي لها الشكل $R=M/N$ حيث أن M,N كثيري حدود .

و بنفس الأسلوب بما أن $E(\Lambda)$ فإن $\wp(z), \wp'(z) \in E(\Lambda)$ تحوي كل الدوال الكسرية بـ $\wp$ و $\wp'$ و بمعاملات من $\mathbb{C}$ ، و هذه الدوال ستشكل حقلاً نرمز له بـ $\mathbb{C}(\wp, \wp')$. أي:

$$\mathbb{C}(\wp, \wp') = \{g \,;\, g = R(\wp, \wp')\}$$

حيث أن R دالة كسرية بـ $\wp$ و $\wp'$ و بمعاملات من $\mathbb{C}$ ، و هذا الحقل هو أصغر حقل يحوي الدوال $\wp$ و $\wp'$.

سنبرهن أن $E(\Lambda) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$ و $\mathbb{C}(\wp) = E_{even}(\Lambda)$. لكن في البداية نلاحظ أن[1]:

(1) إذا كانت $f(z)$ دالة ناقصية فردية و تحليلية عند النقطة $z_0 = w/2$ (w دور لـ $f(z)$) فإن $f(z_0) = 0$

(2) إذا كانت $F(z)$ دالة زوجية ، فإن $F'(z)$ دالة فردية ، و بشكل عام ينتج أنه إذا كانت $F(z)$ دالة زوجية فإن $F^{(2k)}(z)$ زوجية ، و $F^{(2k+1)}(z)$ فردية.

أما إذا كانت $F(z)$ دالة فردية فإن $F^{(2k)}(z)$ فردية و $F^{(2k+1)}(z)$ زوجية . حيث أن $0 \le k \in \mathbb{Z}$.

(3) إذا كانت $F(z)$ دالة ناقصية زوجية ، و $z_0 = w/2$ صفراً لـ $F(z)$ ، حيث أن w دور لـ $F(z)$. عندئذ فإن مرتبة هذا الصفر هي عدد زوجي.

(5.1.20) مبرهنة:

كل دالة ناقصية $f(z)$ يمكن التعبير عنها بالشكل $f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z) R_2(\wp(z))$

حيث أن R_1 و R_2 دوال كسرية بـ $\wp(z) = \wp(z, \Lambda)$ ، و الدالة f ناقصية بالنسبة لشبكة الدور Λ .

(5.1.21) مبرهنة:

إذا كان $f, g \in E(\Lambda)$. عندئذ فإن $\phi(f, g) = 0$ ، حيث أن $\phi(f, g)$ حدودية غير خزولة(irreducible) بالمتغيرات u, v و بمعاملات عقدية غير مساوية للصفر.

من أجل الإثبات أنظر [38],pp386 ، [2],pp.100 ، [6],pp.358

نتيجة:

إذا كانت $f \in E(\Lambda)$ ، عندئذ فإن f تحقق المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى التي لها الشكل $\phi(\wp, \wp') = 0$ ، حيث أن $\phi(u, v)$ هي حدودية غير خزولة بالمتغيرات u, v و بمعاملات عقدية غير مساوية للصفر.

الإثبات ينتج من المبرهنة (5.1.21) بأخذ $g = f'$.

(5.1.22) ملاحظة:

(1) وجدنا أن كل دالة ناقصية $f(z)$ يمكن أن تكتب بالشكل:

$$f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z) R_2(\wp(z)) \qquad .... \quad (5.17)$$

حيث أن $R_1(u)$ و $R_2(u)$ هي دوال كسرية ، و بالعكس كل دالة من الشكل (5.17) هي دالة ناقصية.

و بالتالي إذا كانت $W(x, y)$ دالة كسرية بالمتحولات x, y . عندئذ فإن $W(\wp, \wp')$ ستكون دالة ناقصية، و بالتالي فإن صف الدوال الناقصية متطابق مع صف الدوال التي لها الشكل $W(\wp, \wp')$ ، أي أن الدوال $W(\wp, \wp')$ تملك الشكل[2] (5.17). و ذلك لأن $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$.

(2) مهما تكن $f(z)$ دالة ناقصية. عندئذ فإنه يمكننا استخدام (5.17) في حساب $\int f(z)dz$ ، حيث أن[3]:

$$\int f(z)dz = \int R_1(\wp(z))dz + \int R_2(\wp(z))d\wp(z)$$

---

[1] أنظر [38],pp.382

[2] أنظر [38],pp.384

[3] أنظر [47],pp.480

البناء الثاني لدالة وايرشتراوس الناقصية: [3]

درسنا في (4.10.2) الدوال $f_\alpha(z|\tau)=\theta_1'\dfrac{\theta_\alpha(z|\tau)}{\theta_\alpha\theta_1(z|\tau)}$ حيث $(\alpha=2,3,4)$ و $\operatorname{Im}\tau>0$.

و وجدنا أنها دوال زوجية ناقصية بالأدوار $\pi,\pi\tau$ ، أقطابها من المرتبة الثانية عند النقاط $z\equiv 0(\operatorname{mod}\pi,\pi\tau)$ ، و راسب $f_\alpha^2(z|\tau)$ عند كل قطب يساوي الصفر، و منه فإن نشر لوران لـ $f_\alpha^2(z|\tau)$ بجوار النقطة $z=0$ من الشكل:

$$f_\alpha^2(z|\tau)=z^{-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^{2n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.18)$$

و هذا النشر صحيح في الحلقة $0<|z|<r$ حيث أن $r=\min\{|u|;u\equiv 0(\operatorname{mod}\pi,\pi\tau)\}$.

و لدينا نشر لوران للدالة $\wp(z)$ في جوار $z=0$ بالشكل:

$$\wp(z;w_1,w_2)=z^{-2}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n}z^{2n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.19)$$

و بالتالي من (5.18) و (5.19) و المبرهنة (2.3.3) نجد أن:

$$\wp(z;\pi,\pi\tau)=f_\alpha^2(z|\tau)+\text{constant}$$

ومنه:

$$\wp(z;w_1,w_2)=\left(\pi^2/w_1^2\right)\cdot f_\alpha^2((\pi z/w_1)|\tau)+\text{constant} \quad ; \quad \alpha=2,3,4\,;\tau=w_2/w_1$$

أي أن:

$$\wp(z;w_1,w_2)=\frac{\pi^2}{w_1^2}\left[\frac{\theta_1'}{\theta_2}\cdot\frac{\theta_2((\pi z/w_1)|\tau)}{\theta_1((\pi z/w_1)|\tau)}\right]^2+c_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.20)$$

$$\wp(z;w_1,w_2)=\frac{\pi^2}{w_1^2}\left[\frac{\theta_1'}{\theta_3}\cdot\frac{\theta_3((\pi z/w_1)|\tau)}{\theta_1((\pi z/w_1)|\tau)}\right]^2+c_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.21)$$

$$\wp(z;w_1,w_2)=\frac{\pi^2}{w_1^2}\left[\frac{\theta_1'}{\theta_4}\cdot\frac{\theta_4((\pi z/w_1)|\tau)}{\theta_1((\pi z/w_1)|\tau)}\right]^2+c_3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.22)$$

بأخذ $z=w_1/2\,,\,z=(w_1+w_2)/2\,,\,z=w_2/2$ في (5.20) ، (5.21) ، (5.22)على الترتيب نجد أن:

$$\wp(z;w_1,w_2)-e_1=\left(\pi^2/w_1^2\right)\cdot f_2^2((\pi z/w_1)|\tau) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.23)$$

$$\wp(z;w_1,w_2)-e_3=\left(\pi^2/w_1^2\right)\cdot f_3^2((\pi z/w_1)|\tau) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.24)$$

$$\wp(z;w_1,w_2)-e_2=\left(\pi^2/w_1^2\right)\cdot f_4^2((\pi z/w_1)|\tau) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.25)$$

بأخذ $z=w_2/2$ في (5.23) و $z=w_1/2$ في (5.24) و $z=w_2/2$ في (5.24) نجد على الترتيب:

$$e_1-e_2=\left(\pi^2/w_1^2\right)\theta_3^4 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.26)$$

$$e_1-e_3=\left(\pi^2/w_1^2\right)\theta_4^4 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.27)$$

$$e_3-e_2=\left(\pi^2/w_1^2\right)\theta_2^4 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.28)$$

لكن لدينا:

$$f_4(z|\tau)=\frac{\theta_1'\theta_4(z|\tau)}{\theta_4\,\theta_1(z|\tau)}=\frac{2K}{\pi}\frac{1}{sn(2Kz/\pi)}=\frac{\theta_3^2}{sn(\theta_3^2 z)}$$

و $sn(u)=u-(1/6)(1+k^2)u^3+O(u^5) \quad ; \quad (u\to 0)$ ، و $k^2=\dfrac{\theta_2^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)}$ ، و منه:

$$f_4(z|\tau)=(1/z)\left[1-(1/6)(\theta_3^4+\theta_2^4)z^2+O(z^4)\right]^{-1}=(1/z)\left[1+(1/6)(\theta_3^4+\theta_2^4)z^2+O(z^4)\right]$$

و منه فإن:

$$f_4^2(z|\tau)=z^{-2}+(1/3)\left(\theta_3^4+\theta_2^4\right)+O(z^2)\quad ;(z\to 0)$$

و بالتالي:

$$f_4^2((\pi z/w_1)|\tau)=(\pi z/w_1)^{-2}+(1/3)\left(\theta_3^4+\theta_2^4\right)+O\left((\pi z/w_1)^2\right)\quad ;(z\to 0)$$

و منه:

$$\wp(z;w_1,w_2)=z^{-2}+\left(\pi^2/3w_1^2\right)\cdot\left(\theta_3^4+\theta_2^4\right)+O(z^2)+B\quad ;(B \text{ is constant})$$

إلا أن الحد الثابت في نشر لوران للدالة $\wp(z)$ في جوار الصفر معدوم . و منه فإن:

$$B=-\left(\pi^2/3w_1^2\right)\left(\theta_3^4+\theta_2^4\right)$$

أي أن:

$$\wp(z;w_1,w_2)=\frac{\pi^2}{w_1^2}\left[\frac{\theta_1'}{\theta_4}\cdot\frac{\theta_4((\pi z/w_1)|\tau)}{\theta_1((\pi z/w_1)|\tau)}\right]^2-\frac{\pi^2}{3w_1^2}\left(\theta_3^4+\theta_2^4\right)\quad ....\ (5.29)$$

بالمقارنة بين (5.29) و (5.24) نجد أن $e_2=-\left(\pi^2/3w_1^2\right)\left(\theta_3^4+\theta_2^4\right)$

و منه بالتعويض في (5.26) و (5.27) نجد أن:

$$e_2=-\left(\pi^2/3w_1^2\right)\left(\theta_3^4+\theta_2^4\right)\ ,\ e_1=\left(\pi^2/w_1^2\right)\left[\theta_3^4-(1/3)\left(\theta_3^4+\theta_2^4\right)\right],$$

$$e_3=\left(\pi^2/w_1^2\right)\left[\theta_2^4-(1/3)\left(\theta_3^4+\theta_2^4\right)\right]\quad ....\ (5.30)$$

و بالتالي : $e_1+e_2+e_3=0$ ، و هذا ما أثبتناه سابقاً في (5.1.16) .

العلاقة بين دالة وايرشتراوس الناقصية و دوال جاكوبي الناقصية:

سنتناول في هذه الفقرة العلاقة بين دوال جاكوبي الناقصية و دالة وايرشتراوس الناقصية.

و من أجل ذلك سنعرف الدوال $\sigma_r(z)$ حيث أن $r=1,2,3$.

لنعرف في البداية الدوال $\left(\wp(z)-e_r\right)^{1/2}$ حيث أن $e_r=\wp(w_r/2)$ ، و $w_1+w_2+w_3=0$.

و هنا يجب أن نأخذ الجذر التربيعي لـ $\wp(z)-e_r$ بحيث يكون لهذا الجذر قطب بسيط و الراسب يساوي الواحد عند النقطة $z=0$ [1] . (أنظر [3],pp.192 ، [6],pp.367).

لدينا:

$$\forall z,u\in\mathbb{C}\ ;\quad \wp(z)-\wp(u)=\frac{-\sigma(z-u)\sigma(z+u)}{\sigma^2(z)\sigma^2(u)}\quad ....\ (5.31)$$

بأخذ $u=w_r/2\ (r=1,2,3)$ في (5.31) نجد أن:

$$\wp(z)-e_r=\frac{-\sigma\left(z-(w_r/2)\right)\sigma\left(z+(w_r/2)\right)}{\sigma^2(z)\sigma^2\left((w_r/2)\right)}$$

من (5.6) ، و بما أن $w_r/2\not\in\Lambda\ (r=1,2,3)$ - حيث أن (w_1,w_2) أساس Λ - نجد أن:

$$\sigma\left(z-(w_r/2)\right)=\sigma\left(z+(w_r/2)-w_r\right)=-\sigma\left(z+(w_r/2)\right)\cdot e^{-\eta_r z}\quad ;(r=1,2,3)$$

و بالتالي:

$$\left(\wp(z)-e_r\right)^{1/2}=\pm\exp\left(-\frac{1}{2}\eta_r z\right)\frac{\sigma\left(z+(w_r/2)\right)}{\sigma(z)\sigma\left(w_r/2\right)}\quad ;(r=1,2,3)\quad ....\ (5.32)$$

---

[1] أقطاب $\left(\wp(z)-e_r\right)^{1/2}$ هي أصفار $\theta_1(z|\tau)$ أي $z\equiv 0\ (\bmod\ w_1,w_2)$

و بما أن راسب $(\wp(z)-e_r)^{1/2}$ عند $z=0$ يساوي الواحد فإن:

$$(\wp(z)-e_r)^{1/2}=+\exp\left(-\frac{1}{2}\eta_r z\right)\cdot\frac{\sigma\left(z+(w_r/2)\right)}{\sigma(z)\sigma(w_r/2)}\quad ;\ (r=1,2,3)\qquad .... \quad (5.33)$$

لنكتب العلاقة (5.33) بالشكل:

$$(\wp(z)-e_s)^{1/2}=\exp\left(-\frac{1}{2}\eta_s z\right)\cdot\frac{\sigma\left(z+(w_s/2)\right)}{\sigma(z)\sigma(w_s/2)}\quad ;\ s=1,2,3$$

و بأخذ $z=w_r/2$ حيث أن $r\neq s$ و $r=1,2,3$ ، نجد أن:

$$(e_r-e_s)^{1/2}=\exp(-\eta_s w_r/4)\cdot\frac{\sigma\left((w_r/2)+(w_s/2)\right)}{\sigma(w_r/2)\sigma(w_s/2)}\qquad .... \quad (5.34)$$

(5.1.23) تعريف:

من أجل $r=1,2,3$ ، تعرّف الدوال $\sigma_r(z)$ بالشكل:

$$\sigma_r(z):=\exp\left(-\frac{1}{2}\eta_r z\right)\cdot\frac{\sigma\left(z+(w_r/2)\right)}{\sigma(w_r/2)}\quad ;\ \eta_r=\eta(w_r)$$

⊛ بالتعويض في (5.33) و (5.34) نجد أن:

$$(\wp(z)-e_r)^{1/2}=\frac{\sigma_r(z)}{\sigma(z)}\quad ,\quad (e_r-e_s)^{1/2}=\frac{\sigma_s(w_r/2)}{\sigma(w_r/2)}$$

و من التعريف نجد أن $\sigma_r(w_r/2)=0\quad ,\quad \sigma_r(0)=1$ ، و أن $\sigma_r(z)$ $(r=1,2,3)$ دالة صحيحة أصفارها بسيطة عند النقاط $z\equiv w_r/2 \pmod\Lambda$ ، حيث أن Λ هي الشبكة المولدة بـ w_1,w_2 .

(5.1.24) مبرهنة:

(1) الدوال $\sqrt{\wp(z)-e_r}=\sigma_r(z)/\sigma(z)\ ;\ (r=1,2,3)$ ناقصية ، بالأدوار $w_r, 2w_s\ (r\neq s)$ ، من المرتبة الثانية.

(2) $\wp'(z)=-2\sqrt{\wp(z)-e_1}\sqrt{\wp(z)-e_2}\sqrt{\wp(z)-e_3}$.

(5.1.25) مبرهنة:

الدوال $\sigma_r(z)$ $(r=1,2,3)$ دوال زوجية ، أي $\sigma_r(-z)=\sigma_r(z)$.

(5.1.26) مبرهنة:

الدوال $\sigma_r(z)$ $(r=1,2,3)$ تحقق:

(1) $$\sigma_r(z+w_r)=-\sigma_r(z)\cdot\exp\left[\eta_r\cdot\left(z+\frac{w_r}{2}\right)\right]$$

(2) $$\sigma_r(z+w_s)=\sigma_r(z)\cdot\exp\left[\eta_s\cdot\left(z+\frac{w_s}{2}\right)\right]\quad ، \quad s=1,2,3\ ,\ r\neq s$$

الإثبات:

(1) لدينا $\sigma_r(z):=\exp\left(-\frac{1}{2}\eta_r z\right)\cdot\frac{\sigma\left(z+(w_r/2)\right)}{\sigma(w_r/2)}$ ، و منه:

$$\sigma_r(z+w_r)=e^{\frac{-\eta_r\cdot(z+w_r)}{2}}\cdot\frac{\sigma\left(z+w_r+(w_r/2)\right)}{\sigma(w_r/2)}$$

$$= e^{\frac{-\eta_r \cdot (z + w_r)}{2}} \cdot \left(-e^{\eta_r \cdot \left(z + \frac{w_r}{2} + \frac{w_r}{2} \right)} \cdot \frac{\sigma\left(z + (w_r / 2)\right)}{\sigma\left(w_r / 2\right)} \right)$$

$$= -e^{\frac{\eta_r \cdot (z + w_r)}{2}} \cdot \frac{\sigma\left(z + (w_r / 2)\right)}{\sigma\left(w_r / 2\right)}$$

$$= -e^{\frac{\eta_r \cdot (z + w_r)}{2}} \cdot e^{\eta_r \cdot z / 2} \cdot e^{-\eta_r \cdot z / 2} \cdot \frac{\sigma\left(z + (w_r / 2)\right)}{\sigma\left(w_r / 2\right)}$$

$$= -e^{\frac{\eta_r \cdot (z + w_r)}{2}} \cdot e^{\eta_r \cdot z / 2} \cdot \sigma_r(z)$$

$$= -e^{\eta_r \cdot \left(z + \frac{w_r}{2} \right)} \cdot \sigma_r(z)$$

(2) إذا كان $r \neq s$ فإن:

$$\sigma_r(z + w_s) = e^{\frac{-\eta_r \cdot (z + w_s)}{2}} \cdot \frac{\sigma\left(z + w_s + (w_r / 2)\right)}{\sigma\left(w_r / 2\right)}$$

$$= e^{\frac{-\eta_r \cdot (z + w_s)}{2}} \cdot \left(-e^{\eta_s \cdot \left(z + \frac{w_r}{2} + \frac{w_s}{2} \right)} \cdot \frac{\sigma\left(z + (w_r / 2)\right)}{\sigma\left(w_r / 2\right)} \right)$$

$$= -e^{-\eta_r z / 2} \cdot e^{\eta_s z} \cdot e^{(\eta_s w_r - \eta_r w_s)/2} \cdot e^{\eta_s w_s / 2} \cdot \frac{\sigma\left(z + (w_r / 2)\right)}{\sigma\left(w_r / 2\right)}$$

$$= e^{\eta_s z} \cdot e^{-\eta_r z / 2} \cdot e^{\eta_s w_s / 2} \cdot \frac{\sigma\left(z + (w_r / 2)\right)}{\sigma\left(w_r / 2\right)}$$

$$= e^{\eta_s z} \cdot e^{-\eta_r z / 2} \cdot e^{\eta_s w_s / 2} \cdot \sigma_r(z) \cdot e^{\eta_r z / 2}$$

$$= e^{\eta_s \cdot \left(z + \frac{w_s}{2} \right)} \cdot \sigma_r(z)$$

(5.1.27) تعريف:

لنعرف الدوال $S(z), C(z), D(z)$ ، و التي عن طريقها سنحصل على دوال جاكوبي الناقصية $sn(u), cn(u), dn(u)$ بالشكل:

$$S(z) := (e_1 - e_2)^{1/2} \frac{\sigma(z)}{\sigma_2(z)} = \left(\frac{e_1 - e_2}{\wp(z) - e_2} \right)^{1/2} \quad , \quad C(z) := \frac{\sigma_1(z)}{\sigma_2(z)} = \left(\frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) - e_2} \right)^{1/2}$$

$$D(z) := \frac{\sigma_3(z)}{\sigma_2(z)} = \left(\frac{\wp(z) - e_3}{\wp(z) - e_2} \right)^{1/2}$$

حيث أن الجذر التربيعي في تعريف $C(z)$ و $D(z)$ مأخوذ بحيث يكون $C(0) = D(0) = 1$. و من التعريف ينتج أن $S(0) = 0$.

من التعريف نجد أن الدوال $S(z), C(z), D(z)$ ميرومورفية في $\mathbb{C}$ ، مزدوجة الدورية ، شبكة الدور لكل منها مولدة بالأزواج $(2w_1, w_2), (2w_2, w_3), (2w_3, w_1)$ على الترتيب .

و بالتالي فهي دوال ناقصية و يكون لدينا:

	w_1	w_2	w_3
$S(z)$	-1	1	-1
$C(z)$	-1	-1	1
$D(z)$	1	-1	-1

……………. (5.35)

بمعنى أن: $C(z+w_1)=-C(z)\ ,\ D(z+w_1)=D(z)$ ، .... و ذلك حسب المبرهنة (5.1.27) و الخصائص الدورية للدالة $\sigma(z)$.

يُعرّف المقاس k للدوال $S(z),C(z),D(z)$ بالشكل: $k:=-\left(\dfrac{e_3-e_2}{e_1-e_2}\right)^{1/2}$

و المقاس المتمم k' بالشكل: $k':=\left(\dfrac{e_1-e_3}{e_1-e_2}\right)^{1/2}$ ، و منه فإن $k^2+k'^2=1$.

(نلاحظ أنه بما أن e_1,e_2,e_3 مختلفة مثنى مثنى فإن k منتهية و لا تساوي 0 أو ±1).

و بما أن $S^2(z)=\dfrac{e_1-e_2}{\wp(z)-e_2}$ ، فإنه ينتج لدينا أن:

$$\sqrt{1-S^2(z)}=\sqrt{\frac{\wp(z)-e_1}{\wp(z)-e_2}}=C(z)\ ,\ \sqrt{1-k^2S^2(z)}=\sqrt{1-\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}\frac{e_1-e_2}{\wp(z)-e_2}}=D(z)$$

و الجذر التربيعي هنا اخترناه بحيث يبقى للدالتين $C(z)$ ، $D(z)$ القيمة 1 عند $z=0$.

كما أنه بما أن $S(z)=\left(\dfrac{e_1-e_2}{\wp(z)-e_2}\right)^{1/2}$ ، فإنه باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ z و من المبرهنة (5.1.25) ينتج:

$S'(z)=\left(e_1-e_2\right)^{1/2}C(z)\cdot D(z)$ ، و بالتالي:

$$C'(z)=-\left(e_1-e_2\right)^{1/2}D(z)\cdot S(z)\quad,\quad D'(z)=-\left(e_1-e_2\right)^{1/2}k^2\cdot S(z)\cdot C(z)$$

(5.1.28) مبرهنة:

لتكن $\Lambda=\{mw_1+nw_2\,;m,n\in\mathbb{Z}\}$.

(1) الدالة $S(z)$ مزدوجة الدورية بالأدوار $2w_1,w_2$ ، أي $\Lambda_S=\{2mw_1+nw_2\}$ هي شبكة دور $S(z)$.

(2) $S(-z)=-S(z)$

(3) أصفار $S(z)$ بسيطة عند نقاط الشبكة Λ .

(4) أقطاب $S(z)$ بسيطة عند النقاط المطابقة لـ $w_2/2$ و $w_1+(w_2/2)$ بالمقاس Λ_S .

(5) راسب $S(z)$ عند $w_2/2$ يساوي $-(e_3-e_2)^{-1/2}$ ، و الراسب عند $w_1+(w_2/2)$ يساوي $(e_3-e_2)^{-1/2}$.

(5.1.29) مبرهنة:

(1) الدالة $C(z)$ مزدوجة الدورية بالأدوار $2w_2,w_3$ ، أي $\Lambda_C=\{2mw_2+nw_3\}$ هي شبكة دور $C(z)$.

(2) $C(-z)=C(z)$

(3) أصفار $C(z)$ بسيطة عند النقاط $\Lambda+(w_1/2)$.

(4) أقطاب $C(z)$ بسيطة عند النقاط المطابقة لـ $w_2/2$ و $3w_2/2$ بالمقاس Λ_C .

(5) راسب $C(z)$ عند $w_2/2$ يساوي $i\,(e_3-e_2)^{-1/2}$ ، و الراسب عند $3w_2/2$ يساوي $-i\,(e_3-e_2)^{-1/2}$.

(5.1.30) مبرهنة:

(1) الدالة $D(z)$ مزدوجة الدورية بالأدوار $2w_3,w_1$ ، أي $\Lambda_D=\{2mw_3+nw_1\}$ هي شبكة دور $D(z)$.

(2) $D(-z)=D(z)$

(3) أصفار $D(z)$ بسيطة عند النقاط $\Lambda+(w_3/2)$.

(4) أقطاب $D(z)$ بسيطة عند النقاط المطابقة لـ $w_2/2$ و $w_3+(w_2/2)$ بالمقاس Λ_D .

(5) راسب $D(z)$ عند $w_2/2$ يساوي $-i\left(e_1-e_2\right)^{-1/2}$ ، و الراسب عند $w_3+\frac{w_2}{2}$ يساوي $i\left(e_1-e_2\right)^{-1/2}$.

(5.1.31) تعريف:

بوضع $u=\left(e_1-e_2\right)^{1/2} z$. فإن دوال جاكوبي الناقصية $sn(u), cn(u), dn(u)$ تُعرّف بالشكل:

$$sn(u):=S\left((e_1-e_2)^{1/2}u\right)\Rightarrow sn(u):=S(z)$$

$$cn(u):=C\left((e_1-e_2)^{1/2}u\right)\Rightarrow cn(u):=C(z)$$

$$dn(u):=D\left((e_1-e_2)^{1/2}u\right)\Rightarrow dn(u):=D(z) \qquad .... \qquad (5.39)$$

بالإستفادة من تعريف الدوال $S(z), C(z), D(z)$ - التعريف (5.1.27)- و العلاقات و الخصائص التي تحققها هذه الدوال، و المبرهنات (5.1.28)،(5.1.29)،(5.1.30) يمكننا أن نستنتج جميع العلاقات و الخصائص التي تحققها دوال جاكوبي الناقصية و التي درسناها في الفصل الثالث.

فإذا عرّفنا الأعداد K و iK' بالشكل[1]:

$$K:=\frac{1}{2}w_1\left(e_1-e_2\right)^{1/2} \quad , \quad iK':=\frac{1}{2}w_2\left(e_1-e_2\right)^{1/2}$$

فإنه سيكون لدينا - من أجل $sn(u), cn(u), dn(u)$ - الجدول التالي:

	$2K$	$2iK'$	$2K+2iK'$
$sn(u)$	-1	1	-1
$cn(u)$	-1	-1	1
$dn(u)$	1	-1	-1

………… (5.40)

بمعنى أن $sn(u+2K)=-sn(u)$ ، $sn(u+2iK)=sn(u)$ ، ....

كما أن[2]:

$$sn\left(\frac{Kz}{w_1/2}\right)=\frac{K}{w_1/2}\frac{\sigma(z)}{\sigma_2(z)}=S(z) \;,\; cn\left(\frac{Kz}{w_1/2}\right)=\frac{\sigma_1(z)}{\sigma_2(z)}=C(z)$$

$$dn\left(\frac{Kz}{w_1/2}\right)=\frac{\sigma_3(z)}{\sigma_2(z)}=D(z)$$

بالمقارنة بين الجدولين (5.35) ، (5.40) نجد أنه حتى يتم التوافق بينهما يجب أن يكون زوج الدور الإبتدائي لكل من الدوال $S(z), C(z), D(z)$ بالشكل:

$S(z)$: $2w_1, w_2$ أي أن متوازي أضلاع الدور الإبتدائي رؤوسه عند النقاط $0, 2w_1, 2w_1+w_2, w_2$

$C(z)$: $2w_1, -w_3$ أي أن متوازي أضلاع الدور الإبتدائي رؤوسه عند النقاط $0, 2w_1, 2w_1-w_3, -w_3$

$D(z)$: $w_1, 2w_2$ أي أن متوازي أضلاع الدور الإبتدائي رؤوسه عند النقاط $0, w_1, w_1+2w_2, 2w_2$

و يمكننا أن نأخذ على الترتيب أساس شبكة الدور لكل من الدوال $S(z), C(z), D(z)$ بالشكل:

$$(w_1, 2w_2)\;,\;(2w_1, -w_3)\;,\;(2w_1, w_2)$$

إلا أن الذي أخذناه في المبرهنات (5.1.29)،(5.1.30)،(5.1.31) هو على الترتيب:

$$(2w_3, w_1)\;,\;(2w_2, w_3)\;,\;(2w_1, w_2)$$

و هذا هو الأسهل لأنه بمعرفة أحد الأساسات لإحدى الدوال فإنه يمكننا معرفة الأساسات المتبقية[3] ، و ذلك بتبديل دوري لـ w_1, w_2, w_3 .

---

[1] ندعو K ، iK' بربع الأدوار(quarter periods) لدوال جاكوبي الناقصية

[2] أنظر [6],pp.384

[3] أنظر [6],PP.382

⊛ كما أنه يمكننا أن نأخذ $(2w_1, 2w_2)$ كأساس لشبكة الدور للدوال $S(z), C(z), D(z)$. و هي شبكة دور واحدة لكل هذه الدوال، و هذا يتوافق مع كون $(4K, 4iK')$ أساس شبكة دور الدوال sn, cn, dn.
ويمكننا استنتاج جميع الخصائص و العلاقات التي تحققها دوال جاكوبي الناقصية إنطلاقاً من الخصائص و العلاقات التي تحققها الدوال $S(z), C(z), D(z)$ و دالة وايرشتراوس الناقصية ، و من الجدير بالذكر أن العديد من المراجع ، مثل [6] ، تقوم بدراسة دالة وايرشتراوس الناقصية قبل دراسة دوال جاكوبي الناقصية.

(5.2) الدوال و الأشكال المعيارية: Modular Functions and Modular Forms

(5.2.1)ملاحظة[1]:

لتكن $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$.

إن التحويل $q := e^{2\pi i z}$ $z \mapsto$ ينقل $\mathcal{H}$ إلى القرص $D'(0,1) = \{q \in \mathbb{C}; |q| < 1, q \neq 0\}$ ، و بالتالي إذا كان لدينا $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ دالة ميرومورفية في $\mathcal{H}$ ، دورية دورها يساوي الواحد.
فعندئذ يوجد دالة $F\left(e^{2\pi i z}\right) = F(q)$ ميرومورفية في $D'(0,1)$ بحيث يكون $f(z) = F(q)$ ، و يكون:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n q^n$$

و متسلسلة فورييه هذه هي نشر لوران للدالة $F(q)$ في جوار $q = 0$.
و سلوك الدالة $f(z)$ عند نقطة اللانهاية $i\infty$ (أو $z = \infty$)[2] هو نفسه سلوك الدالة $F(q)$ عند الصفر.
فإذا كانت $F(q)$ ميرومورفية (أو تحليلية) عند الصفر فإن $f(z)$ ميرومورفية (أو تحليلية) عند اللانهاية.

و بالتالي إذا كانت $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z}$ حيث $z \in \mathcal{H}$ و كان $m > 0$ و $c_{-m} \neq 0$ ، عندئذ فإن لـ f قطب من المرتبة m عند $i\infty$ ، أما إذا كانت $m \leq 0$ فإننا نقول إن f تحليلية عند $i\infty$.

و بالتالي إذا كان نشر فورييه للدالة $f(z)$ من الشكل $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z}$ ، فإن ذلك يعني أن f إما أن تكون تحليلية أو أن يكون لها قطباً من المرتبة m عند نقطة اللانهاية $i\infty$.
و عندما تكون f تحليلية عند $i\infty$ فإننا نكتب $f(i\infty) = F(0)$ (أو $f(\infty) = F(0)$) و تكون هذه هي قيمة f عند اللانهاية.

(5.2.2) تعاريف:

تعريف (1):

لتكن F دالة عقدية معرفة على $\mathcal{N}$ (مجموعة كل الشبكات[3] في $\mathbb{C}$)، و ليكن $k \in \mathbb{Z}$. نقول عن F إنها دالة من الوزن $2k$ إذا كان $F(\lambda\Lambda) = \lambda^{-2k} F(\Lambda)$ ، و ذلك من أجل كل $\Lambda \in \mathcal{N}$ و $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ، و $\lambda\Lambda = \{\lambda w ; w \in \Lambda\}$

تعريف (2):

لتكن $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ، و ليكن $k \in \mathbb{Z}$. نقول عن f إنها دالة معيارية بضعف (weakly modular) من الوزن $2k$ [4] . إذا كانت f ميرومورفية في $\mathcal{H}$ و تحقق العلاقة:

$$f(z) = (cz+d)^{-2k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \quad ; \ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}$$

---

[1] أنظر [44] و [2],pp.255

[2] بعض المراجع ترمز للانهاية في $\mathcal{H}$ بـ $i\infty$ مثل [44] ، و البعض الآخر يرمز لها بـ ∞ مثل [40]

[3] الشبكة Γ في فضاء خطي حقيقي V ذو بعد منتهي هي زمرة جزئية من V بحيث تكون Γ متقطعة و V/Γ متراصة. أنظر [40],pp.81

[4] بعض المراجع تذكر بأن f من الوزن $-2k$ ، أو من الوزن k مثل:
Joseph H.Silverman ,1986, The Arithmetic of Elliptic Curves , Springer.

تعريف (3):
نقول عن الدالة المعيارية بضعف من الوزن $2k$ إنها معيارية (modular) من الوزن $2k$ ، إذا كانت ميرومورفية عند اللانهاية، أي عند $i\infty$.

تعريف (4):
نقول عن الدالة المعيارية f من الوزن $2k$ إنها شكل معياري من الوزن $2k$ (modular form) إذا كانت تحليلية عند كل نقطة من نقاط $\mathcal{H}$ بما فيها اللانهاية.
و إذا كان $f(\infty)=0$ فإننا ندعو f بـ cusp form[1] من الوزن $2k$.

(5.2.3) متسلسلة Eisenstien و اللامتغيرات g_3, g_2 :
وجدنا أنه عندما $n \geq 3$ فإن المتسلسلة $S_n = \sum_{w\in\Lambda'} w^{-n}$ (و التي تدعى متسلسلة Eisenstien من المرتبة n) متقاربة بالإطلاق ، (التوطئة 5.1.2) ، و وجدنا أن:

$$g_2 = 60S_4 = 60\sum_{w\in\Lambda'} w^{-4} \ , \ g_3 = 140S_6 = 140\sum_{w\in\Lambda'} w^{-6}$$

يمكننا أن نعتبر S_l $(l\geq 3)$ و g_2 و g_3 دوالاً بـ w_1, w_2 و اللذين يشكلان أساساً لـ Λ . حيث أن:

$$S_l(w_1,w_2) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z},(m,n)\neq(0,0)} (mw_1+nw_2)^{-l}$$

أو دوالاً بـ Λ ، لأن المجموع مأخوذ على كل نقاط Λ . حيث أن $S_l(\Lambda)=\sum_{w\in\Lambda'} w^{-l}$.
و بالتالي من أجل $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ نجد أن:

$$S_l(\lambda\Lambda) = \lambda^{-l}S_l(\Lambda) \ , \ g_2(\lambda\Lambda) = \lambda^{-4}g_2(\Lambda) \ , \ g_3(\lambda\Lambda) = \lambda^{-6}g_3(\Lambda)$$

أي أن $g_3(\Lambda), g_2(\Lambda), S_l(\Lambda)$ هي دوال من الوزن $6,4,l$ على الترتيب.
و يمكننا أن نعتبرها دوالاً بمتغير عقدي واحد $\tau\in\mathcal{H}$ ، حيث أن $\tau = w_2/w_1$ و $\operatorname{Im}(\tau)>0$ ، و ذلك لأن:

$$S_l(w_1,w_2) = S_l(w_1,w_1\tau) = w_1^{-l}S_l(1,\tau) = w_1^{-l}S_l(\tau) = w_1^{-l}\sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+n\tau)^{-l}$$

و منه $S_l(\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+n\tau)^{-l}$.

كما أن: $g_2(\Lambda) = g_2(w_1,w_2) = 60S_4(w_1,w_2) = 60w_1^{-4}\sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+n\tau)^{-4}$

أي أن: $g_2(w_1,w_1\tau) = w_1^{-4}g_2(1,\tau) = 60w_1^{-4}\sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+n\tau)^{-4}$

و بالتالي: $g_2(1,\tau) = g_2(\tau) = 60\sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+n\tau)^{-4}$

و بالمثل نجد أن $g_3(\tau) = 140\sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+n\tau)^{-6}$.

حيث أننا اعتبرنا أن $f(1,\tau) = f(\tau)$ دون أن يظهر أي إلتباس.

(5.2.4) المميز Δ : The discriminant Δ
إن من الأمثلة الهامة على الأشكال المعيارية ـ كما سنرى ـ المميز Δ ، مميز الحدودية $4x^3 - g_2x - g_3$ ، و التي وجدنا أن جذورها المختلفة هي e_1, e_2, e_3 . و وجدنا أن Δ يُعرف بالشكل التالي:

$$\Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2$$

و $\Delta \neq 0$ لأن e_1, e_2, e_3 مختلفة مثنى مثنى. و وجدنا أن $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$.

[1] Cusp ≡ "spitzen form" in German , "forme parabolique" in French

و من هنا نجد أنه يمكننا اعتبار Δ دالة بـ (w_1,w_2) أو بـ Λ أو بـ τ ، و نجد أيضاً أنه $\forall\tau\in\mathcal{H};\Delta(\tau)\neq 0$.
كما أن $\forall\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\};\Delta(\lambda\Lambda)=\lambda^{-12}\Delta(\Lambda)$ ، أي أن Δ دالة من الوزن 12 .

(5.2.5) تعريف:

ليكن $\tau\in\mathcal{H}$ حيث $\tau=w_2/w_1$ ، نعرّف الدالة $J(\tau)$ - و التي تدعى بدالة كلاين المعيارية (Klein's modular function)- بالشكل :

$$J(\tau)=J(w_1,w_2):=\frac{g_2^3(w_1,w_2)}{\Delta(w_1,w_2)}$$

و لهذه الدالة أهمية كبيرة،حيث أنه باستخدامها يمكن إعطاء إثبات قصير لمبرهنة بيكارد في التحليلي العقدي[1].
و ندعو الدالة $j(\tau):=1728\,J(\tau)$ بـ modular invariant[2] أو Klein's modular invariant
و الدوال $j(\tau),J(\tau)$ تشكل أمثلة هامة للدوال المعيارية كما سنرى.

(5.2.6) مبرهنة:

الدوال $g_2(\tau),g_3(\tau),\Delta(\tau),J(\tau)$ هي دوال تحليلية في $\mathcal{H}$.

(5.2.7) ملاحظة:

بما أن الدالة J تعتمد فقط على الشبكة Λ . فإذا كان (w_1,w_2) أساس لـ Λ بحيث $\operatorname{Im}(w_2/w_1)>0$ ، و كان (w_1',w_2') أساس آخر لـ Λ ، فإن $w_1'=aw_1+bw_2\ ,\ w_2'=cw_1+dw_2$
و منه: $\tau'=\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ ، حيث $\tau=w_2/w_1$.
كما أن $\operatorname{Im}(\tau')=\operatorname{Im}(\tau)/|c\tau+d|^2$ ، أي $\tau\in\mathcal{H}\Leftrightarrow\tau'\in\mathcal{H}$. و نجد أيضاً أن:

$$g_2(w_1,w_2)=g_2(w_1',w_2')\quad,\quad g_3(w_1,w_2)=g_3(w_1',w_2')$$

و منه: $\Delta(w_1,w_2)=\Delta(w_1',w_2')\ ,\ J(w_1,w_2)=J(w_1',w_2')$. و بالتالي:

$$J(\tau')=J\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=J(\tau)\qquad ....\ (5.41)$$

بأخذ $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$ ، نجد $\tau'=\tau+1$ و منه $J(\tau+1)=J(\tau)$ ،
أي أن J دورية دورها يساوي الواحد ، و بالتالي فإنه حسب (0.5) نجد:

$$\forall\tau\in\mathcal{H};\ J(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{2\pi i n\tau}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n q^n\quad ;q=e^{2\pi i\tau}$$

نشر فورييه للدوال $g_2(\tau),g_3(\tau)$:

لدينا متسلسلة Eisenstein بالشكل $S_l(\tau)=\sum_{w\in\Lambda'}w^{-l}=\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m+n\tau)^{-l}$
بأخذ $l=2k$ (إذا كانت $l=2k+1$ فإن $S_l=0$) ، و $(1,\tau)$ أساس لـ Λ حيث $\tau=w_2/w_1$. نجد أن:

$$G_k(\tau)=\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m+n\tau)^{-2k}=S_{2k}(\tau)\qquad ;\ k\geq 2$$

و الدالة[3] $G_k(\tau)$ دورية بالنسبة لـ τ دورها يساوي الواحد.

---

[1] أنظر [44],pp.43
[2] أنظر [40],pp.89
[3] بعض المؤلفين يسمون $G_k(\tau)\ (k\geq 2)$ متسلسلة Eisenstein ذات الدليل k أو ذات الدليل $2k$. ([40],pp.83).

(5.2.8) توطئة:
إذا كانت $\tau \in \mathcal{H}$ و $n > 0$ (مثبتة) . عندئذ فإن:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m+n\tau)^{-4} = \left(8\pi^4/3\right)\sum_{r=1}^{\infty} r^3 q^{rn} \quad , \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}(m+n\tau)^{-6} = \left(-8\pi^6/15\right)\sum_{r=1}^{\infty} r^5 q^{rn} \quad ; q = e^{2\pi i \tau}$$

⊛ من التوطئة (5.2.8) نجد بشكل عام:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m+n\tau)^{2k} = \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{r=1}^{\infty} r^{2k-1} q^{rn} \quad ; q = e^{2\pi i \tau}$$

(5.2.9) مبرهنة: (نشر فورييه للدوال $g_2(\tau), g_3(\tau)$) .
ليكن $\tau \in \mathcal{H}$. عندئذ فإن:

$$g_2(\tau) = \left(4\pi^4/3\right)\left[1+240\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_3(k)q^k\right] \quad , \quad g_3(\tau) = \left(8\pi^6/27\right)\left[1-504\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_5(k)q^k\right]$$

حيث أن: $q = e^{2\pi i \tau}$ و $\sigma_\alpha(k) = \sum_{d|k} d^\alpha$.

الإثبات:

$$\begin{aligned}
g_2(\tau) &= 60S_4(\tau) = 60\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m+n\tau)^{-4} \\
&= 60\left[\sum_{m=-\infty, m\neq 0}^{\infty} m^{-4} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left((m+n\tau)^{-4}+(m-n\tau)^{-4}\right)\right] \\
&= 60\left[2\zeta(4) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m+n\tau)^{-4}\right] \\
&= 60\left[2\zeta(4) + \left(16\pi^4/3\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} r^3 q^{nr}\right] \qquad ; \text{from lemma (5.2.8)}
\end{aligned}$$

لكن $\zeta(4) = \pi^2/90$ (الدالة $\zeta(s)$ هنا هي دالة ريمان زيتا[1]) ، و بالتالي:

$$\begin{aligned}
g_2(\tau) &= 60\left[\left(2\pi^4/90\right) + \left(16\pi^4/3\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_3(k)q^k\right] \\
&= \left(4\pi^4/3\right)\left[1+240\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_3(k)q^k\right]
\end{aligned}$$

و بالمثل نوجد نشر فورييه للدالة $g_3(\tau)$.

(5.2.10) مبرهنة[2]:

$$G_k(\tau) = S_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n \; ; k \geq 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.42)$$

حيث أن: $q = e^{2\pi i \tau}$ ، و $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.
الإثبات:
لدينا: $G_k(\tau) = S_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m+n\tau)^{-2k}$ ، و منه:

---

[1] دالة ريمان زيتا تعرف بالشكل $(s > 1)$; $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ، كما أن $\zeta(2) = \pi^2/6 , \zeta(4) = \pi^4/90 , \zeta(6) = \pi^6/945$
أنظر [40],pp.91

[2] هذه المبرهنة تعطي نشر فورييه لمتسلسلة Eisenstein $(k \geq 2) G_k(\tau) = S_{2k}(\tau)$.

$$G_k(\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} m^{-2k}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(m+n\tau)^{-2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(m+n\tau)^{-2k}$$
$$=2\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2k}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m+n\tau)^{-2k}\right)$$
$$=2\zeta(2k)+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{r=1}^{\infty} r^{2k-1}q^{rn}\right)$$
$$=2\zeta(2k)+\frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{r=1}^{\infty} r^{2k-1}q^{rn}\right)$$
$$=2\zeta(2k)+\frac{2(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^{n}$$

(5.2.11) أصفار الدوال $g_2(\tau), g_3(\tau)$: [26],pp.107

لدينا $g_3(\tau)=140\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m+n\tau)^{-6}$, $g_2(\tau)=60\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m+n\tau)^{-4}$

سنبرهن الآن على أن: $g_2\left(e^{2\pi i/3}\right)=0$, $g_3(i)=0$ ، و أن هذه الأصفار هي أصفار بسيطة.

و منه فإن $J(i)=1$ و $J\left(e^{2\pi i/3}\right)=0$ ، لأن $\Delta\left(e^{2\pi i/3}\right)\neq 0$.

أولاً: $g_3(i)=140\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m+ni)^{-6}=140\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left(i(m i^{-1}+n)\right)^{-6}$

$$=-140\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(-m i+n)^{-6}=-140\sum_{(M,n)\neq(0,0)}(M i+n)^{-6}=-g_3(i)$$

و منه فإن: $g_3(i)=0$.

ثانياً: $g_2\left(e^{2\pi i/3}\right)=60\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left(m+n e^{2\pi i/3}\right)^{-4}$

$$=60e^{-8\pi i/3}\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left(m e^{-2\pi i/3}+n\right)^{-4}=60e^{-2\pi i/3}\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left(m e^{4\pi i/3}+n\right)^{-4}$$
$$=60e^{-2\pi i/3}\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left(m(e^{4\pi i/3}+1-1)+n\right)^{-4}$$
$$=60e^{-2\pi i/3}\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left[m e^{2\pi i/3}(e^{2\pi i/3}+e^{-2\pi i/3})-m+n\right]^{-4}$$
$$=60e^{-2\pi i/3}\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left[2m\cos(2\pi/3)e^{2\pi i/3}+n-m\right]^{-4}$$
$$=60e^{-2\pi i/3}\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\left(-m e^{2\pi i/3}+n-m\right)^{-4}$$

بفرض أن $n-m=N$ و $-m=M$. مع ملاحظة أنه في حالة m,n غير معدومان معاً فإن M,N غير معدومان معاً . لأنه إذا كان $M=0$ فإن $m=0$ و منه $N=n$ ، فإذا كان $N=0$ فإن $m=n=0$ معدومان معاً ، و هذا تناقض . و بالتالي فإن:

$$g_2\left(e^{2\pi i/3}\right)=60e^{-2\pi i/3}\sum_{(M,N)\neq(0,0)}\left(N+Me^{2\pi i/3}\right)^{-4}=e^{-2\pi i/3}g_2\left(e^{2\pi i/3}\right)$$

و منه فإن $g_2\left(e^{2\pi i/3}\right)\left(1-e^{-2\pi i/3}\right)=0$ ، و بالتالي $g_2\left(e^{2\pi i/3}\right)=0$

⊛ سنأتي الآن على إثبات أن الدوال $g_3(\tau), g_2(\tau)$ هي أشكال معيارية من الوزن 4 ، 6 على الترتيب.
وجدنا أن الدوال $g_3(\tau), g_2(\tau)$ تحليلية في $\mathcal{H}$ (المبرهنة 5.2.6) ، كما أنها تحليلية عند نقطة اللانهاية.
حيث أنه من العلاقة (5.42) نجد أن $G_k(i\infty) = G_k(\infty) = 2\zeta(2k)$ ، و منه:

$$g_2(i\infty) = g_2(\infty) = 60G_2(\infty) = 60\cdot 2\cdot \zeta(4) = 60\cdot 2\cdot \left(\pi^4/90\right) = 4\pi^4/3$$

$$g_3(i\infty) = g_3(\infty) = 60G_3(\infty) = 140\cdot 2\cdot \zeta(6) = 140\cdot 2\cdot \left(\pi^6/3^3\cdot 5\cdot 7\right) = 8\pi^6/27$$

ليكن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ ، و $\tau' = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ و منه:

$$\begin{aligned} g_3(\tau') &= 140\sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+n\tau')^{-6} = 140\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left\{(c\tau+d)^{-6}\left[m(c\tau+d)+n(a\tau+b)\right]^6\right\}^{-1} \\ &= 140(c\tau+d)^6 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[(md+nb)+(mc+na)\tau\right]^{-6} \\ &= 140(c\tau+d)^6 \sum_{(M,N)\neq(0,0)} \left(M+N\tau\right)^{-6} \quad ; M = md+nb, N = mc+na \\ &= (c\tau+d)^6 g_3(\tau) \end{aligned}$$

أي أن: $g_3(\tau) = (c\tau+d)^{-6} g_3\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$.

و بالمثل نجد أن: $g_2(\tau) = (c\tau+d)^{-4} g_2\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$

و بالتالي فإن $g_3(\tau), g_2(\tau)$ حيث أن $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ هي أشكال معيارية من الوزن 4 ، 6 على الترتيب.

⊛بما أن $\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau)$ ، فإن $\Delta(\tau)$ شكل معياري من الوزن 12 ،
لكن $\Delta(i\infty) = \Delta(\infty) = 0$ و منه فإن $\Delta(\tau)$ هو شكل cusp من الوزن 12 .
كما أن: $J(\tau) = g_2^3(\tau)/\Delta(\tau)$ و $j(\tau) = 1728J(\tau)$ هي دوال معيارية من الوزن صفر .
لأن $J(\tau)$ دالة تحليلية على كامل $\mathcal{H}$ (المبرهنة 5.2.6) ، و $J(\tau') = J(\tau)$ (العلاقة 5.41) ،
و بما أن $\Delta(\infty) = 0$ و $g_2(\infty) \neq 0$ فإن لـ $J(\tau)$ قطب عند اللانهاية.
كما أن متسلسلة Eisenstein - $G_k(\tau)$ - هي شكل معياري من الوزن $2k$ ، حيث أن:

$$\begin{aligned} G_k(\tau') &= G_k\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (m+n\tau')^{-2k} \\ &= \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (c\tau+d)^{-2k}\left(m(c\tau+d)+n(a\tau+b)\right)^{-2k} \\ &= (c\tau+d)^{2k} \sum_{(M,N)\neq(0,0)} (M+N\tau)^{-2k} \quad ; M = md+nb, N = mc+na \end{aligned}$$

و بالتالي فإن: $G_k(\tau) = (c\tau+d)^{-2k} G_k\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$

و لدينا $G_k(\tau)$ تحليلية في $\mathcal{H}$ و عند نقطة اللانهاية (حيث أن $G_k(i\infty) = 2\zeta(2k) \neq 0$) .

ملاحظة:

إذا كانت f دالة معيارية من الوزن صفر . فإننا ندعو f بـ [1] Automorphic function .

[1] أنظر [6],pp.427

(5.2.12) مبرهنة:

ليكن $z \in \mathbb{C}$ بحيث $\mathrm{Im}(z) > 0$ ، عندئذ فإن:

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12}\left(q - 24q^2 + 252q^3 - 1427q^4 + \ldots\right)$$
$$= (2\pi)^{12}\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)\cdot q^n \qquad ; q = e^{2\pi i z}$$

حيث أن $\tau(n)$ هي دالة حسابية تدعى دالة رامانوجان (Ramanujan's function)

(5.2.13) مبرهنة:

ليكن $z \in \mathbb{C}$ بحيث $\mathrm{Im}(z) > 0$ ، عندئذ فإن:

$$j(z) = q^{-1} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty}c(n)\cdot q^n \qquad ; \; q = e^{2\pi i z} \, , c(n) \in \mathbb{Z}$$

(5.2.14) مبرهنة:

لتكن $q = e^{\pi i z}$ و $\mathrm{Im}(z) > 0$. عندئذ فإن:

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12} q^2 \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{2n}\right)^{24} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (5.43)$$

(5.2.15) ملاحظة:

لتكن $q = e^{\pi i \tau}$. من العلاقة (5.43) نجد أن $\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\cdot\eta^{24}(\tau)$

حيث أن: $\eta(\tau) = q^{1/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})$ هي دالة ديدكند- إيتا (أنظر التعريف 4.9.2)

و نعلم أنه مهما يكن $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ فإن:

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (1)^{1/24}(c\tau + d)^{1/2}\eta(\tau)$$ (أنظر العلاقة 4.93 و المبرهنة 4.9.4)

من المبرهنة (5.2.14) يمكننا أيضاً إثبات صحة هذه العلاقة بالشكل:

لدينا: $\Delta(\tau) = (c\tau + d)^{-12}\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \; ; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ ، و منه:

$$(2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau) = (c\tau + d)^{-12}(2\pi)^{12}\eta^{24}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

أي أن: $(c\tau + d)^{12}\eta^{24}(\tau) = \eta^{24}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$ ، و منه نجد العلاقة المطلوبة.

و نلاحظ أيضاً أنه بما أن $g_2 = 2\left(e_1{}^2 + e_2{}^2 + e_3{}^2\right)$ ، ومن العلاقات (5.30) ، نجد أن:

$$g_2 = 2\left(\pi^4/9w_1{}^4\right)\left[\left(2\theta_3^4 - \theta_2^4\right)^2 + \left(\theta_3^4 + \theta_2^4\right)^2 + \left(2\theta_2^4 - \theta_3^4\right)^2\right]$$
$$= (4/3)\left(\pi^4/w_1{}^4\right)\left(\theta_3{}^8 + \theta_2{}^8 - \theta_2{}^4\theta_3{}^4\right)$$

لكن $\theta_3^4 - \theta_2^4 = \theta_4^4$ ، و منه $2\theta_2^4\theta_3^4 = \theta_3^8 + \theta_2^8 - \theta_4^8$ ، و بالتالي:

$$g_2 = (4/3)\left(\pi^4/w_1{}^4\right)\left(\theta_3^8 + \theta_2^8 - \frac{1}{2}\theta_3^8 - \frac{1}{2}\theta_2^8 + \frac{1}{2}\theta_4^8\right) = (2/3)\left(\pi^4/w_1{}^4\right)\left(\theta_2^8 + \theta_3^8 + \theta_4^8\right)$$

كما أن:

$$J(\tau)=\frac{\left(g_2(\tau)\right)^3}{\Delta(\tau)}=\frac{\left(8\pi^{12}/27w_1^{12}\right)\left(\theta_2^8+\theta_3^8+\theta_4^8\right)}{16\left(\pi^{12}/w_1^{12}\right)\left(\theta_1'\right)^8}=\frac{\left(\theta_2^8+\theta_3^8+\theta_4^8\right)^3}{54\,\theta_2^8\,\theta_3^8\,\theta_4^8} \quad .... \ (5.44)$$

$$j(\tau)=1728\,J(\tau)=32\,\frac{\left(\theta_2^8+\theta_3^8+\theta_4^8\right)^3}{\theta_2^8\,\theta_3^8\,\theta_4^8} \quad .... \ (5.45)$$

(5.2.16) ملاحظة: [44]
إن الأعداد الصحيحة $c(n)$ في نشر الدالة $j(z)$ - المبرهنة (5.2.13) - ، أول من قام بحساب أول سبعة أعداد منها هو Bewick في عام 1916 ، و في عام 1939 قام Zuckerman بحساب أول 24 عدد ، و في عام 1953 قام Van Wijigarden بحساب أول مئة ، و ذلك عن طريق صيغ الدوال ثيتا و الصيغتين (5.44)، (5.45) .
و أول دراسة لخواص قابلية القسمة لهذه الأعداد كانت من قِبل A.O.L.Atkin و J.N.O'Brien ، و لهذه الأعداد خواص حسابية هامة. ففي عام 1942 قام D.H.Lehmer في مقالته:
Properties of the coefficients of the modular invariant $J(\tau)$, Amer.J.Math.,1942 ,
بإثبات أنه مهما يكن $n \ge 1$ ، فإن: $(n+1)c(n) \equiv 0 \pmod{24}$
و في عام 1949 قام Joseph Lehner في مقالته:
Divisibility properties of the Fourier coefficients of the modular invariant $j(\tau)$, Amer.J.Math.,1949
باكتشاف خواص قابلية القسمة لهذه الأعداد ،حيث أنه أثبت أن:

$$c(5n) \equiv 0 \pmod{25}\ ,\ c(7n) \equiv 0 \pmod{7}\ ,\ c(11n) \equiv 0 \pmod{11}$$

و في عام 1958 قام Morris Newman بإثبات أن:

$$c(13np)+c(13n)c(13p)+p^{-1}c\left(13np^{-1}\right) \equiv 0 \pmod{13}$$

حيث أن $p\,p^{-1} \equiv 1 \pmod{13}$ ، و $c(x)=0$ إذا كان $x \in \mathbb{Z}$.
و في عام 1967 قام Atkin و O'Brien في مقالتهما:
Some properties of $p(n)$ and $c(n)$ Modulo powers of 13,Trans.Amer.Math.Soc.,1967
بتعميم التطابقات التي حصل عليها Morris Newman و Joseph Lehner .
كما أن الأعداد $\tau(n)$ [1]، أنظر المبرهنة (5.2.12)، كانت قد دُرست و تم وضع قائمة بقيمها من أجل قيم مختلفة لـ n من قبل D.H.Lehmer ، و من قبل آخرين. حيث أن أول عشر قيم لها هي بالشكل:

$$\tau(1)=1, \tau(2)=-24, \tau(3)=252, \tau(4)=-1472, \tau(5)=4830, \tau(6)=-6048$$

$$\tau(7)=-16744, \tau(8)=84480, \tau(9)=-113643, \tau(10)=-115920$$

و قد قام Lehmer بحساب $\tau(n)$ من أجل $n<214928639999$ ، و قد خمّن أن $\tau(n) \ne 0$ من أجل $n \ge 1$
و خمّن رامانوجان أن $|\tau(p)| \le 2p^{11/2}$ ،حيث أن p عدد أولي.
و لا زالت هناك مسائل مفتوحة حتى الآن متعلقة بهذا الموضوع.

---

[1] الدالة الحسابية $\tau(n)$ هي دالة أوجدها رامانوجان- S,Ramanujan – في عام 1916 في ورقته:
On certain arithmetical functions , Trans.Cmb.Phil.Soc.,22(1916),159-184
أنظر:
D.H.Lehmer, The Primality of Ramanujan's Tau-Function ,Amer. Math. Monthly,Vol.72,No.2 ,1965,pp.15-18

(5.3) مسألة العكس في نظرية الدوال الناقصية:

وجدنا سابقاً (أنظر الفقرة 4.6) أنه إذا كان $\tau \in \mathcal{H}$ عدداً معلوماً و كان $k^2(\tau) = \dfrac{\theta_2^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)} \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ ،

فإن حل المعادلة التفاضلية :

$$(dy/dz)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2) \quad .... \quad (5.46)$$

هو $y = sn(z,k)$. (دالة جاكوبي الناقصية).

إلا أنه في العديد من المسائل و التطبيقات في الرياضيات و التي تدخل في دراستها الدوال الناقصية، يتطلب إيجاد حل للمعادلة (5.46) - أي إيجاد $y = sn(z,k)$ - في الحالة[1] التي تكون فيها k مُعطاة و لانعلم أي شيء عن τ من أجل ذلك لا بد من إثبات مسألة وجود عدد $\tau \in \mathcal{H}$ بحيث يكون للمعادلة:

$$m = k^2(\tau) = \frac{\theta_2^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)} \quad .... \quad (5.47)$$

حل ، حيث أن $m \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. و التي تدعى بمسألة العكس .

و في حال أثبتنا وجود τ كحل للمعادلة (5.47) فإنه يمكننا بناء الدالة $sn(z,k)$ بدلالة الدوال ثيتا بالشكل:

$sn(z,k) = k^{-1/2} \dfrac{\theta_1(\theta_3^{-2} z|\tau)}{\theta_4(\theta_3^{-2} z|\tau)}$ ، بوصفه حلاً للمعادلة التفاضلية (5.46) .

و ستكون $K = K(m) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}$

دالة تحليلية على $\mathbb{C} - [1,\infty[$ - بأخذ الفرع الرئيسي- و إذا كانت $m < 1$ فإن $K(m) \in \mathbb{R}^+$ ، و إذا كانت $m \geq 1$ فإن إشارة $\operatorname{Im} K$ مماثلة لإشارة $\operatorname{Im}(m)$. و عندما $m > 0$ فإن $K'(m) \in \mathbb{R}^+$ ، و إذا كانت $m \leq 0$ فإن إشارة $\operatorname{Im} K'$ معاكسة لإشارة $\operatorname{Im}(m)$. أنظر [32] .

كما أن[2]: $|m| < 1 \ ; \ K(m) = (\pi/2) F(1/2, 1/2; 1; m)$.

و منه فإن $y = K(m)$ تحقق المعادلة التفاضلية:

$$m(1-m)\frac{d^2y}{dm^2} + (1-m)\frac{dy}{dm} - \frac{1}{4}y = 0$$

و بما أن $K'(m) = K(1-m)$ ، فإن $K'(m) = (\pi/2) F(1/2, 1/2; 1; m')$.

إن صعوبة المسألة المطروحة لدينا تكمن في إثبات أنه إذا كان لدينا $m \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ فإنه يوجد $\tau \in \mathcal{H}$ بحيث يكون $m = k^2(\tau)$.

و لقد تم التعرض لإثبات وجود τ (أي حل مسألة العكس) في مراجع عدة من أهمها [3] و [15] ، إلا أن الإثباتات كانت طويلة و تبدأ بحالة خاصة عندما $0 < m < 1$ ومن أجل $m \in \mathbb{C} \setminus \{]-\infty, 0] \cup [1, \infty[\}$ فإن الإثبات يتم بالإعتماد على مفاهيم أخرى في التحليل العقدي مثل مفهوم التمديد التحليلي (analytic continuation) و بعدها تتم دراسة الحالتين $m \in]-\infty, 0[$ و $m \in]1, \infty[$ ، كلّ على حِدة.

---

[1] أنظر [3],[48]

[2] تدعى المتسلسلة $|z| < 1, c > 0 \ ; \ F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(a)_n (b)_n}{(c)_n \, n!} z^n$ ، بالمتسلسلة فوق الهندسية. و هي متسلسلة متقاربة من أجل $|z| < 1$ حسب اختبار دالامبير و هذه المتسلسلة تمثل دالة تحليلية تحقق معادلة غاوص فوق الهندسية:

$z(1-z)\dfrac{d^2y}{dz^2} + (c-(a+b+1)z)\dfrac{dy}{dz} - ab\,y = 0$ -Gauss' hypergeometric differential equation- أنظر [3]

و في المرجع [15] تم استخدام سطوح ريمان- Riemann surfaces - من أجل إثبات المطلوب.

(5.3.1) مبرهنة: (مسألة العكس)
ليكن $m \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ عدداً مُعطى ، عندئذ فإنه يوجد $\tau \in \mathcal{H}$ ، بحيث تكون $k^2(\tau) = m$

⊛ سنأتي على إثبات هذه المبرهنة في الحالة $m \in \mathbb{C}\setminus\{0,1,2,1/2\}$ بعد تناول بعض التعريفات و المبرهنات التي ستساعدنا في الإثبات.

(5.3.2) تعريف:
تعرّف الدالة $\lambda(\tau)$ على $\mathcal{H}$ ، بالمساواة : $\lambda(\tau) := \dfrac{\theta_2^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)}$

(5.3.3) مبرهنة:
$\lambda(\tau) = \dfrac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}$ ، حيث أن $e_j = \wp(w_j/2)$ $(j = 1,2,3)$ و $w_1 + w_2 + w_3 = 0$

(5.3.4) مبرهنة:
المعادلة $J(\tau) = c$ $\left(c \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}\right)$،لها حل وحيد في لصاقة المنطقة الأساسية R_Γ .
أي أن $J(\tau) - c$ لها صفر بسيط في $\bar{R}_\Gamma$ ، و عندما تكون $c = 0$ فإن $e^{2\pi i/3}$ صفر من المرتبة الثالثة لـ$J(\tau)$
و عندما تكون $c = 1$ فإن i صفر من المرتبة الثانية لـ$J(\tau) - 1$.

⊛ من المبرهنة (5.3.4) يمكننا أن نثبت أنه إذا كانت f دالة معيارية فإنه يمكن كتابتها على شكل دالة كسرية بالدالة J .
في الحقيقة بفرض أن f معيارية أصفارها $z_1,...,z_n$ و أقطابها $p_1,...,p_n$ ، مع أخذ المراتب لهذه الأقطاب و الأصفار بعين الإعتبار في العد ، و لتكن $g(\tau) = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{J(\tau) - J(z_k)}{J(\tau) - J(p_k)}$
عندئذ فإن أصفار f و g متطابقة و من نفس المراتب ، و بالتالي فإن الدالة $f(\tau)/g(\tau)$ ثابتة حسب مبرهنة ليوفيل ، و منه فإن f دالة كسرية بـ J .
و بالتالي إذا كان لدينا f دالة ميرومورفية في $\mathcal{H}$ ، و صامدة (invariant) بالنسبة للتحويلات $\tau \mapsto -\tau^{-1}$ ، $\tau \mapsto \tau + 1$. عندئذ فإن f دالة كسرية[1] بـ J .
و بشكل آخر إذا كانت f دالة معرفة في $\mathcal{H}$ ، و صامدة بالنسبة للتحويلات $\tau \mapsto -\tau^{-1}$ ، $\tau \mapsto \tau + 1$ ، و ميرومورفية في القرص $|q| \le 1$ و ذلك باعتبارها دالة بـ $q = e^{\pi i \tau}$ ، فإن $f(\tau)$ تكتب بالشكل $F\left(j(\tau)\right)$ حيث أن F دالة كسرية[2].

(5.3.5) مبرهنة:
إذا كان a_2, a_3 عددين عقديين بحيث $(a_2)^3 - 27(a_3)^2 \neq 0$.عندئذ يوجد w_1, w_2 من $\mathbb{C}$ بحيث $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$ و بحيث يكون لدالة وايرشتراوس الناقصية اللامتغيرات $g_2(w_1,w_2) = a_2 , g_3(w_1,w_2) = a_3$

⊛ إن المبرهنة (5.3.5) تشكل الأداة الأساسية في إثبات المبرهنة (5.3.1)، بالشكل التالي:

---

[1] لأنه إذا كانت f ميرومورفية في $\mathcal{H}$ ، فإن f ستكون معيارية بضعف من الوزن $2k$ إذا و فقط إذا تحققت العلاقتين التاليتين: $f(z+1) = f(z)$, $f\left(-z^{-1}\right) = z^{2k} f(z)$. أنظر [40]

[2] أنظر [3],pp.206 ، [30],pp.175

إثبات المبرهنة (5.3.1) في حالة $m \in \mathbb{C}\setminus\{0,1,2,1/2\}$: [54]

لتكن[1] $m \in \mathbb{C}\setminus\{0,1,2,1/2\}$ و لتكن b_1, b_2, b_3 أعداداً عقدية منتمية إلى المجموعة التالية:

$$\{(2-m)/3, (-m-1)/3, (2m-1)/3\}$$

بحيث $b_i \neq b_j$ مهما تكن $i \neq j$ و $i, j = 1,2,3$

عندئذ فإن $b_i \neq 0 \ (\forall i = 1,2,3)$ و $b_1 + b_2 + b_3 = 0$

بوضع $a_2 = -4(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3)$ و $a_3 = 4 b_1 b_2 b_3$ ، نجد أن $(a_2)^3 - 27(a_3)^2 \neq 0$

و بالتالي فإنه حسب المبرهنة (5.3.5) يوجد w_1, w_2 من $\mathbb{C}$ بحيث $\mathrm{Im}(w_2/w_1) > 0$ و $g_2 = a_2, g_3 = a_3$

حيث أن g_3, g_2 هي لا متغيرات دالة وايرشتراوس الناقصية .

لنأخذ $\tau = w_2/w_1$. عندئذ τ هو العدد المطلوب إثبات وجوده ، و لنبين ذلك .

وضوحاً $\tau \in \mathcal{H}$

لدينا : $\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ ، أي أن :

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) + 4(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3)\wp(z) - 4 b_1 b_2 b_3$$
$$= 4\wp^3(z) - 4(b_1 + b_2 + b_3)\wp^2(z) + 4(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3)\wp(z) - 4 b_1 b_2 b_3$$
$$= 4\left(\wp^3(z) - b_3\wp^2(z) - b_1\wp^2(z) + b_1 b_3\wp(z) - b_2\wp^2(z) + b_2 b_3\wp(z) + b_1 b_2\wp(z) - b_1 b_2 b_3\right)$$
$$= 4\left((\wp^2(z) - b_1\wp(z) - b_2\wp(z) + b_1 b_2)(\wp(z) - b_3)\right)$$
$$= 4\left(\wp(z) - b_1\right)\left(\wp(z) - b_2\right)\left(\wp(z) - b_3\right)$$

و لدينا $\wp'^2(z) = 4\left(\wp(z) - e_1\right)\left(\wp(z) - e_2\right)\left(\wp(z) - e_3\right)$

و بذلك سيكون لدينا الحالات الست التالية :

(1) $e_1 = b_1 \ , \ e_2 = b_2 \ , \ e_3 = b_3$

(2) $e_1 = b_1 \ , \ e_2 = b_3 \ , \ e_3 = b_2$

(3) $e_1 = b_2 \ , \ e_2 = b_1 \ , \ e_3 = b_3$

(4) $e_1 = b_3 \ , \ e_2 = b_1 \ , \ e_3 = b_2$

(5) $e_1 = b_2 \ , \ e_2 = b_3 \ , \ e_3 = b_1$

(6) $e_1 = b_3 \ , \ e_2 = b_2 \ , \ e_3 = b_1$

و من أجل كل حالة من الحالات الست السابقة نأخذ على الترتيب :

(1) $b_1 = (2-m)/3 \ , \ b_2 = (-m-1)/3 \ , \ b_3 = (2m-1)/3$

(2) $b_1 = (2-m)/3 \ , \ b_2 = (2m-1)/3 \ , \ b_3 = (-m-1)/3$

(3) $b_1 = (-m-1)/3 \ , \ b_2 = (2-m)/3 \ , \ b_3 = (2m-1)/3$

(4) $b_1 = (-m-1)/3 \ , \ b_2 = (2m-1)/3 \ , \ b_3 = (2-m)/3$

(5) $b_1 = (2m-1)/3 \ , \ b_2 = (2-m)/3 \ , \ b_3 = (-m-1)/3$

(6) $b_1 = (2m-1)/3 \ , \ b_2 = (-m-1)/3 \ , \ b_3 = (2-m)/3$

و في جميع الحالات السابقة يمكننا أن نكتب :

$$k^2(\tau) = \lambda(\tau) = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = \frac{\left((2m-1)/3\right) - \left((-m-1)/3\right)}{\left((2-m)/3\right) - \left((-m-1)/3\right)} = m$$

و بذلك نجد أن $\tau = w_2/w_1$ يحقق المعادلة $k^2(\tau) = m$ و هو المطلوب . □

---

[1] عندما $m = 1/2$ فإن الإثبات يتم عن طريق مبرهنة القيمة الوسطى . أنظر [48],[3] ، و أنظر [3] عندما $m = 2$

(5.3.6) مبرهنة:

ليكن $m \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ ، و ليكن τ_1,τ_2 حلين لـ (5.47) من أجل m نفسها . عندئذ فإن:

$$sn(u|\tau_1)=sn(u|\tau_2)\ ,\ cn(u|\tau_1)=cn(u|\tau_2)\ ,\ dn(u|\tau_1)=dn(u|\tau_2)$$

(5.3.7) مبرهنة:

ليكن $\tau,\tau'\in\mathcal{H}$. عندئذ فإن: $\lambda(\tau)=\lambda(\tau')\Leftrightarrow\tau'=\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$

حيث أن $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ ، بحيث $ad-bc=1$ ، و $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(\mathrm{mod}\,2)$

(5.3.8) ملاحظة:

ندعو المجموعة $G=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix};\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}(\mathrm{mod}\,2)\ ,\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}\right\}$ ، و التي تشكل زمرة جزئية من الزمرة $\Gamma=SL(2,\mathbb{Z})$ ، بـ $\lambda-$group . أو congruence subgroup mod 2 .

و كل دالة automorphic بالنسبة لزمرة جزئية من الزمرة المعيارية $SL(2,\mathbb{Z})$ تدعى بالدالة الناقصية المعيارية (elliptic modular function) . أنظر [2],pp.270 .

من المبرهنة (5.3.7) نجد أن $\lambda(\tau)$ هي automorphic بالنسبة لـ G .

(5.3.9) ملاحظة:

إذا كان $\tau=w_2/w_1\ ,\ \tau'=w_2'/w_1'$ ، بحيث $\tau,\tau'\in\mathcal{H}$.

بالاعتماد على المبرهنة (5.3.7) نجد أنه بتبديلات e_1,e_2,e_3 مع e_1',e_2',e_3' (و عددها 6=!3) ،

بمعنى أنه إذا كان:

(1) $e_1'=e_1,e_2'=e_2,e_3'=e_3$ (2) $e_1'=e_2,e_2'=e_1,e_3'=e_2$ (3) $e_1'=e_3,e_2'=e_2,e_3'=e_1$

(4) $e_1'=e_1,e_2'=e_3,e_3'=e_2$ (5) $e_1'=e_3,e_2'=e_1,e_3'=e_2$ (6) $e_1'=e_2,e_2'=e_3,e_3'=e_1$

فإن τ' ترتبط بـ τ بواسطة التحويل $\tau'=A\tau$ ،حيث أن:

$$A\in\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

أي أن $\lambda(\tau')$ ستكون مساوية لإحدى الدوال الست التالية:

$$\lambda(\tau)\ ,\ 1-\lambda(\tau)\ ,\ \frac{1}{\lambda(\tau)}\ ,\ \frac{1}{1-\lambda(\tau)}\ ,\ \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}\ ,\ 1-\frac{1}{\lambda(\tau)}$$

(5.3.10) مبرهنة:

$$\forall\tau\in\mathcal{H}\ ;\ J(\tau)=\frac{4\left(1-\lambda(\tau)+\lambda^2(\tau)\right)^3}{27\lambda^2(\tau)\left(1-\lambda(\tau)\right)^2}$$

(5.4) دوال جاكوبي الناقصية كدوال بـ $m=k^2$:

لقد تمت دراسة دوال جاكوبي الناقصية الاثنتي عشر $sn(z,k),cn(z,k),dn(z,k),....$ ، بشكل كامل باعتبارها دوالاً بـ z حيث k ثابت. و تم التركيز في الدراسات التطبيقية لهذه الدوال على $0<k<1$.

و درسنا في الفصول السابقة هذه الدوال مع خصائصها و العلاقات التي تحققها بشكل كامل تقريباً.إلا أن خصائصها كدوال بـ k (أو $m=k^2$) و z ثابتة ، لم تتم دراستها بشكل كامل و مركز حتى الآن.

فقد ذكر Wittaker [1] و Watson أن دوال جاكوبي الاثنتي عشر باعتبارها دوالاً بـ k و z ثابتة ، هي دوال تحليلية من أجل $k^2 \in \mathbb{C} - \{]-\infty,0] \cup [1,\infty[\}$.

و ذكر [2] Copson أيضاً أنه من أجل z ثابتة فإن دوال جاكوبي (باعتبارها دوالاً بـ k) هي دوال ميرومورفية على كامل المستوي العقدي $\mathbb{C}$.

و في عام 2003 تمكن[3] Peter Walker من إثبات أن دوال جاكوبي الاثنتي عشر $sn(z\,|m), cn(z\,|m), \ldots$ هي دوال ميرومورفية في $\mathbb{C}$ باعتبارها دوالاً بـ k (أو m) و $z \in \mathbb{C}$ ثابت ، و قيمها من أجل $m \in \mathbb{C} - \{]-\infty,0] \cup [1,\infty[\}$ تُعطى بالشكل:

$$sn(z\,|m) = \frac{\theta_3\left(0,e^{\pi i\tau}\right)}{\theta_2\left(0,e^{\pi i\tau}\right)} \cdot \frac{\theta_1\left(\pi z/2K\,,e^{\pi i\tau}\right)}{\theta_4\left(\pi z/2K\,,e^{\pi i\tau}\right)}\ ,\ cn(z\,|m) = \frac{\theta_4\left(0,e^{\pi i\tau}\right)}{\theta_2\left(0,e^{\pi i\tau}\right)} \cdot \frac{\theta_2\left(\pi z/2K\,,e^{\pi i\tau}\right)}{\theta_4\left(\pi z/2K\,,e^{\pi i\tau}\right)}$$

$$dn(z\,|m) = \frac{\theta_4\left(0,e^{\pi i\tau}\right)}{\theta_3\left(0,e^{\pi i\tau}\right)} \cdot \frac{\theta_3\left(\pi z/2K\,,e^{\pi i\tau}\right)}{\theta_4\left(\pi z/2K\,,e^{\pi i\tau}\right)}$$

حيث أن $m = \lambda(\tau)$ و $K = K(m)$ ، و $\tau \in R_1 \cup R_2$ ، حيث:

$$R_1 = \left\{\tau\ ;\operatorname{Im}\tau > 0, 0 \le \operatorname{Re}\tau < 1, \left|\tau - (1/2)\right| > 1/2\right\}$$

$$R_2 = \left\{\tau\ ;\operatorname{Im}\tau > 0, -1 < \operatorname{Re}\tau \le 0, \left|\tau + (1/2)\right| > 1/2\right\}$$

و من أجل $m = 0$ نجد أن:

$$K = \pi/2\ ,\ K' = \infty\ ,\ sn(z\,|0) = \sin z\ ,\ cn(z\,|0) = \cos z\ ,\ dn(z\,|0) = 1$$

و من أجل $m = 1$ نجد:

$$K = \infty\ ,\ K' = \pi/2\ ,\ sn(z\,|1) = \tanh z\ ,\ cn(z\,|1) = dn(z\,|1) = \operatorname{sech} z = \cosh^{-1} z$$

و إذا كانت $m < 0$ فإن[4]:

$$sn(z\,|m) = (1-m)^{-1/2} sd\left(z\,(1-m)^{1/2}\,|\,m/m-1\right)$$

$$cn(z\,|m) = cd\left(z\,(1-m)^{1/2}\,|\,m/m-1\right)$$

$$dn(z\,|m) = nd\left(z\,(1-m)^{1/2}\,|\,m/m-1\right)$$

و إذا كانت $m > 1$ فإن:

$$sn(z\,|m) = m^{-1/2} sn\left(z\ m^{1/2}\,|m^{-1}\right)$$

$$cn(z\,|m) = dn\left(z\ m^{1/2}\,|\,m^{-1}\right)$$

$$dn(z\,|m) = cn\left(z\ m^{1/2}\,|\,m^{-1}\right)$$

⊛ و قد عرضنا في الفصل الثالث توزيع أصفار و أقطاب دوال جاكوبي الناقصية كدوال بـ z و باعتبار k ثابت أما توزيع أصفار و أقطاب هذه الدوال كدوال بـ m و z ثابت ما زالت قيد الدراسة حتى الآن[5].

---

[1] أنظر [48] المقطع 22.11

[2] أنظر [6] المقطع 15.32

[3] أنظر [32]

[4] أنظر 16.11 ، 16.10 من [1]

[5] أنظر [32] و [33]

"الفصل السادس"

التكاملا ت الناقصية
Elliptic Integrals

في دراستنا لهذا الفصل اعتمدنا على المراجع التالية: 48 ,47 ,17 ,15 ,3,14
ذكرنا سابقاً أن التكاملات الناقصية هي التكاملات التي لها الشكل $\int R\left[z,\sqrt{P(z)}\right]dz$ حيث أن $P(z)$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو الرابعة ، و المعادلة $P(z)=0$ ليس لها جذور مضاعفة ، و R دالة كسرية بـ z و $\sqrt{P(z)}$ ، و بحيث لا نتمكن من التعبير عن هذه التكاملات بدلالة الدوال الإبتدائية.

(6.1) أشكال التكاملات الناقصية:
ندعو التكاملات:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}\ ,\ \int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{P(z)}}\ ,\ \int\frac{dz}{(z-b)\sqrt{P(z)}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6.1)$$

حيث أن $b\in\mathbb{C}$ و $P(z)$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أو الرابعة بحيث $P(z)=0$ ليس لها جذور مضاعفة. بتكاملات ليجاندر الناقصية من النوع الأول و الثاني و الثالث على الترتيب.
و التكاملات:

$$E_1=\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\ ,\ E_2=\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\ ,$$

$$E_3=\int\frac{dz}{(z^2-b)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (6.2)$$

حيث أن k مقاس التكاملات الناقصية. تدعى بتكاملات ليجاندر الناقصية النظامية من النوع الأول و الثاني و الثالث على الترتيب.
و التكاملات:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}\ ,\ \int\frac{z\,dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}\ ,\ \int\frac{dz}{(z-b)\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (6.3)$$

حيث أن g_2,g_3 هي اللامتغيرات المرتبطة بدالة وايرشتراوس الناقصية $\wp(z)$. تدعى بتكاملات وايرشتراوس الناقصية النظامية من النوع الأول و الثاني و الثالث على الترتيب.

(6.2) ملاحظة:

بعض المراجع مثل [48] تدعو التكاملات:

$$I_1=\int\frac{dt}{\sqrt{(at^2+b)(ct^2+d)}},I_2=\int\frac{t^2dt}{\sqrt{(at^2+b)(ct^2+d)}},$$

$$I_3(N)=\int\frac{dt}{(1+Nt^2)\sqrt{(at^2+b)(ct^2+d)}}\quad ....\ (6.4)$$

بتكاملات ليجاندر الناقصية النظامية من النوع الأول و الثاني و الثالث على الترتيب.

و البعض الآخر مثل [3] تدعو التكاملات:

$$F(k,z)=\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\ ,\ E(k,z)=\int\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz\ ,$$

$$\Pi(k,N,z)=\int\frac{dz}{(1+Nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\quad ....\ (6.5)$$

بتكاملات ليجاندر الناقصية النظامية من النوع الأول و الثاني و الثالث على الترتيب[1].

إلا أن:

$$E_2=\int\frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\frac{-1}{k^2}\int\frac{-k^2z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\frac{-1}{k^2}\int\frac{(1-k^2z^2-1)dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$=\frac{-1}{k^2}\int\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz+\frac{1}{k^2}\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\frac{-1}{k^2}E(k,z)+\frac{1}{k^2}F(k,z)$$

$$E_3=\int\frac{dz}{(z^2-b)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\frac{-1}{b}\int\frac{dz}{(1-b^{-1}z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$=-b^{-1}\Pi(k,-b^{-1},z)$$

و بذلك نجد أن التكاملات (6.2) تكتب بدلالة التكاملات (6.5).

كما أن:

$$I_1=\int\frac{dt}{\sqrt{bd}\sqrt{\left(1+(a/b)t^2\right)\left(1+(c/d)t^2\right)}}$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{bd}\sqrt{\left(1-p^2t^2\right)\left(1-q^2t^2\right)}}\quad ;\ a/b=-p^2,c/d=-q^2$$

$$=\int\frac{dz}{p\sqrt{bd}\sqrt{\left(1-z^2\right)\left(1-\left(q^2/p^2\right)z^2\right)}}\quad ;\ t=z/p$$

---

[1] في التكاملات (6.5) بفرض أن حدود التكامل من 0 حتى y ، حيث أن $0<y\le 1$ ، و بأخذ $z=\sin\theta$ و $y=\sin\phi$ نجد أنها تصبح على الترتيب بالشكل:

$$F(k,\phi)=\int_0^\phi\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\ ,E(k,\phi)=\int_0^\phi\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta\ ,\Pi(k,N,\phi)=\int_0^\phi\frac{d\theta}{(1-N\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

و عندما $y=1$ أي $\phi=\pi/2$ ، فإن التكاملات السابقة تدعى بتكاملات ليجاندر الناقصية النظامية التامة من النوع الأول و الثاني و الثالث على الترتيب و يرمز لها على الترتيب بـ $K=K(k),E=E(k),\Pi(k,N)$.

$$= \frac{1}{p\sqrt{bd}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad ; q^2/p^2 = k^2 \Rightarrow k^2 = cb/da$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{bd}} E_1$$

و من أجل I_2 و I_3. بأخذ التحويلات و الفرضيات السابقة نجد أن:

$$I_2 = \int \frac{z^2 dz}{p^3\sqrt{bd}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{1}{p^3\sqrt{bd}} E_2$$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{bd}} \int \frac{dz}{p\left(1+Np^{-2}z^2\right)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{bd}} \int \frac{dz}{Np^{-2}\left(z^2-\left(-p^2/N\right)\right)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$= \frac{p}{N\sqrt{bd}} \int \frac{dz}{\left(z^2-B\right)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad ; \; B = -p^2/N$$

$$= \frac{p}{N\sqrt{bd}} E_3$$

المبرهنة الأساسية للتكاملات الناقصية: [15]

ليكن لدينا التكاملات الناقصية $I = \int R(z,s)dz$ حيث أن $s = \sqrt{P(z)}$ ، و

$P(z) = a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ بحيث $a_j \in \mathbb{C}$ $(0 \le j \le 4)$ و $a_4 \ne 0$ و

المعادلة $P(z) = 0$ ليس لها جذور مضاعفة ، و R دالة كسرية بـ s و z.

إن المبرهنة الأساسية للتكاملات الناقصية تتلخص بأن التكاملات الناقصية[1] I يمكن كتابتها على شكل مجموع منتهٍ لدوال إبتدائية ، و لتكاملات ليجاندر الناقصية (6.1) .

أي أن التكاملات I يعتمد حسابها على التكاملات (6.1) . كما أن التكاملات I يمكن كتابتها بدلالة الدوال الإبتدائية و التكاملات (6.2)، و يمكن كتابتها أيضاً بدلالة الدوال الإبتدائية و التكاملات (6.3) .

الإثبات:

لنفرض بشكل عام أن:

$$P(z) = C_0z^n + C_1z^{n-1} + \ldots + C_{n-1}z + C_n \; ; C_j \in \mathbb{C} \; ; 0 \le j \le n$$

و ليكن التكامل[2] $\int R(z,s)dz$ حيث $s = \sqrt{P(z)}$.

إن الدالة $R(z,s)$ يمكن كتابتها بالشكل $R(z,s) = \dfrac{A_0 + A_1s + A_2s^2 + \ldots + A_ms^m}{B_0 + B_1s + B_2s^2 + \ldots + B_ls^l}$ ،

حيث أن $A_i \; (0 \le i \le m)$ ، $B_j \; (0 \le j \le l)$ هي كثيرات حدود بـ z .

نلاحظ أن s^{2n} $(n \ge 1)$ هي كثيرات حدود بـ z و بالتالي فإن:

---

[1] عندما يكون $\deg P(z) = 3$ أي $P(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ فإنه بأخذ التحويل $z = t^{-1}$ نجد أن:

$$P(t^{-1}) = t^{-4}P_1(t) \; ; P_1(t) = dt^4 + ct^3 + bt^2 + at \quad ,and \;\; s = \sqrt{P(t)} = t^{-2}\sqrt{P_1(t)}$$

أي أن كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة تؤول إلى كثيرة حدود من الدرجة الرابعة و لذلك سنقوم بإثبات المبرهنة فقط من أجل $\deg P(z) = 4$. أنظر ([47],pp.456)

[2] عندما يكون $n > 4$ فإن التكامل يدعى بـ hyperelliptic integral . أنظر ([47],pp.456)

$$R(z,s)=\frac{D_0+D_1s}{E_0+E_1s}=\frac{(D_0+D_1s)(E_0-E_1s)}{E_0{}^2-E_1{}^2s^2}=\frac{C+Ds}{E}$$

حيث أن: $E=E_0{}^2-E_1{}^2s^2\ ,C=D_0E_0-D_1E_1s^2\ ,\ D=D_1E_0-D_0E_1$

و E,D,C,D_1,D_0,E_1,E_0 هي كثيرات حدود بـ z .

و منه فإن:

$$R(z,s)=(C/E)+(D/E)s=R_1(z)+R_2(z)\cdot s=R_1(z)+(Q(z)/s)$$

حيث أن $Q(z)=R_2(z)\cdot s^2$ هي دالة كسرية بـ z.

و بالتالي فإن: $\int R(z,s)dz=\int R_1(z)dz+\int(Q(z)/s)dz$

إن التكامل $\int R_1(z)dz$ يمكن حسابه بدلالة التكاملات و الدوال الإبتدائية.

لنأخذ التكامل $\int(Q(z)/s)dz$.

لدينا: $Q(z)=f(z)/g(z)=G(z)+(F(z)/g(z))$ ، حيث أن:

$$g(z)=B(z-b_1)^{\lambda_1}(z-b_2)^{\lambda_2}(z-b_3)^{\lambda_3}...\ ;\ \lambda_i\geq 1\ ,\ b_i\in\mathbb{C},B\in\mathbb{C}$$

و منه فإن: $Q(z)=G(z)+\sum_i A_{\lambda_i}(z-b_i)^{-\lambda_i}\ ;\ (A_{\lambda_i}\in\mathbb{C})$ ، و بالتالي:

$$\int\frac{Q(z)}{s}dz=\int\frac{Q(z)}{\sqrt{P(z)}}dz=\int\frac{G(z)}{\sqrt{P(z)}}dz+\sum_i A_{\lambda_i}\int\frac{dz}{(z-b_i)^{\lambda_i}\sqrt{P(z)}}$$

و بذلك فإنه سيكون لدينا نمطين أساسيين من التكاملات :

$$I_l=\int\frac{z^l dz}{\sqrt{P(z)}}\ ;\ l\geq 0\quad \&\ H_l=\int\frac{dz}{(z-b)^l\sqrt{P(z)}}\ ;\ l\geq 1$$

من أجل التكاملات I_l ، إن:

$$\frac{d}{dz}\left(z^l\sqrt{P(z)}\right)=l\,z^{l-1}\sqrt{P(z)}+\frac{1}{2}\frac{P'(z)}{\sqrt{P(z)}}z^l=\frac{z^{l-1}}{2\sqrt{P(z)}}\left(2l\,P(z)+z\,P'(z)\right)$$

$$=\frac{z^{l-1}}{2\sqrt{P(z)}}[(2l+n)C_0z^n+(2l+n-1)C_1z^{n-1}+(2l+n-2)C_2z^{n-2}+$$
$$+...+(2l+1)C_{n-1}z+2lC_n]$$

بالمكاملة نجد أن:

$$2z^l\sqrt{P(z)}=(2l+n)C_0I_{l+n-1}+(2l+n-1)C_1I_{l+n-2}+$$
$$+...+(2l+1)C_{n-1}I_l+2lC_nI_{l-1}\qquad .... \ (6.6)$$

و بأخذ $l=0$ في (6.6) نجد أن I_{n-1} يمكن التعبير عنها بدلالة $I_{n-2},I_{n-3},...,I_0$ و $\sqrt{P(z)}$.

و بأخذ $l=1$ فإننا نجد أن I_n يمكن التعبير عنها بدلالة $I_{n-1},I_{n-2},I_{n-3},...,I_0$ و $z\sqrt{P(z)}$.

و بالتالي فإن I_n يمكن التعبير عنها بدلالة $I_{n-2},I_{n-3},...,I_0$ و بدلالة دالة صحيحة (كثيرة حدود من الدرجة الأولى بـ z) مضروبة بـ $\sqrt{P(z)}$.

من أجل التكاملات H_l $(l\geq 1)$ ، إن:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{P(z)}}{(z-b)^l}\right)=\frac{-l}{(z-b)^{l+1}}\sqrt{P(z)}+\frac{1}{2}\frac{P'(z)}{(z-b)^l\sqrt{P(z)}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{P(z)}(z-b)^l}\left(-2l\,P(z)+(z-b)P'(z)\right)$$

بفرض أن:

$$-2l\,P(z)+(z-b)P'(z)=\phi(z) \qquad .... \quad (6.7)$$

نجد أن: $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\sqrt{P(z)}}{(z-b)^l}\right)=\dfrac{\phi(z)}{2\sqrt{P(z)}(z-b)^l}$

إلا أنه بما أن $\phi(z)=-2l\,P(z)+zP'(z)-bP'(z)$ ، فإن:

$$\phi^{(\upsilon)}(z)=-2l\,P^{(\upsilon)}(z)+\left(z\,P'(z)\right)^{(\upsilon)}-bP^{(\upsilon)}(z)=\upsilon P^{(\upsilon)}(z)+zP^{(\upsilon+1)}(z)$$

و منه فإن: $\phi^{(\upsilon)}(z)=(\upsilon-2l)P^{(\upsilon)}(z)+(z-b)P^{(\upsilon+1)}(z)$.

و بما أن $\phi(z)$ كثيرة حدود من الدرجة n ، أي أنها دالة صحيحة، و بالتالي فإنه حسب تايلور في جوار b نجد:

$$\phi(z)=\phi(b)+(z-b)\phi'(b)+\frac{(z-b)^2}{2!}\phi''(b)+...+\frac{(z-b)^n}{\text{n!}}\phi^{(n)}(b) \quad .... \quad (6.8)$$

من (6.7) و (6.8) نجد أن:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\sqrt{P(z)}}{(z-b)^l}\right)=\frac{1}{2\sqrt{P(z)}(z-b)^{l+1}}[-2l\,P(b)+(1-2l)(z-b)P'(b)+$$

$$+\frac{2-2l}{2!}(z-b)^2P''(b)+...+\frac{n-2-2l}{(n-2)!}(z-b)^{n-2}P^{(n-2)}(b)+$$

$$+\frac{n-1-2l}{(n-1)!}(z-b)^{n-1}P^{(n-1)}(b)+\frac{n-2l}{n!}(z-b)^nP^{(n)}(b)]$$

و بالمكاملة نجد أن:

$$\frac{2\sqrt{P(z)}}{(z-b)^l}=-2l\,P(b)H_{l+1}+(1-2l)P'(b)H_l+\frac{2-2l}{2!}P''(b)H_{l-1}+...+$$

$$+\frac{n-1-2l}{(n-1)!}P^{(n-1)}(b)H_{l-n+2}+\frac{n-2l}{n!}P^{(n)}(b)H_{l-n+1}]$$

أولاً: بفرض أن b ليس جذراً لـ $P(z)$ أي $P(b)\neq 0$. فإنه بأخذ $l=1$ نجد أن H_2 يمكن التعبير عنها بدلالة $H_1,H_0,H_{-1},H_{-2},...,H_{-(n-2)}$ ، و $\sqrt{P(z)}/(z-b)$. إلا أن:

$$H_0=\int\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}=I_0\ ,\ H_{-1}=\int\frac{z-b}{\sqrt{P(z)}}dz=I_1-bI_0\ ,...,\ H_{-(n-2)}=\int\frac{(z-b)^{n-2}}{\sqrt{P(z)}}dz$$

أي أن التكاملات $H_0\,,H_{-1}\,,H_{-2}\,,...,H_{-(n-2)}$ يمكن التعبير عنها بدلالة I_l .

و بذلك نحصل على تكامل جديد واحد فقط و هو $H_1=\displaystyle\int\frac{dz}{(z-b)\sqrt{P(z)}}$.

و بالتالي فإن H_2 يمكن التعبير عنه بدلالة $H_1,I_0,I_1,...,I_{n-2}$ و دالة صحيحة بـ z .

و بوضع $l=2$ فإننا نجد أن H_3 يمكن التعبير عنه بدلالة $H_2,H_1,...,H_{-(n-3)}$ و $\sqrt{P(z)}/(z-b)^2$ ، أي يمكن التعبير عنه بدلالة $H_1,I_0,I_1,...,I_{n-2}$ و دالة صحيحة بـ z .

و بشكل عام H_m يمكن التعبير عنها بدلالة $H_1,I_0,I_1,...,I_{n-2}$ و دالة صحيحة بـ z .

و بالتالي فإنه سيكون لدينا فقط التكاملات التالية[1] $H_1,I_0,I_1,...,I_{n-2}$

ثانياً: بفرض أن b جذراً لـ $P(z)$ أي $P(b)=0$. فإنه بأخذ $l=1$ نجد أن H_1 يمكن التعبير عنه بدلالة $H_0,H_{-1},H_{-2},...,H_{-(n-2)}$ و $\sqrt{P(z)}/(z-b)$.

[1] نلاحظ أنه عندما تكون $b=0$ فإن $H_1=I_{-1}$

إلا أن $H_0 = I_0$ ، $H_{-1} = I_1 - bI_0$ ، و $H_{-(n-2)}$ تكتب بدلالة $I_0, I_1, ..., I_{n-2}$.
و منه فإن H_1 يُعبّر عنه بدلالة التكاملات I_l حيث أن $0 \le l \le n-2$.

⊛ مما سبق نجد أنه سيكون لدينا التكاملات $I_l = \int \frac{z^l\, dz}{\sqrt{p(z)}}$ حيث $0 \le l \le n-2$ و $n = \deg P(z)$.

بالإضافة للتكامل $H_1 = \int \frac{dz}{(z-b)\sqrt{p(z)}}$ حيث أن b هو جذر المعادلة $g(z) = 0$ $\left(Q(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \right)$ ، و
ندعو b وسيط التكامل H_1 .
من أجل $n = 4$ فإنه سيكون لدينا التكاملات I_0, I_1, I_2, H_1
و من أجل $n = 3$ سيكون لدينا التكاملات I_0, I_1, H_1

إلا أنه في حالة $n = 4$ ، التكامل $I_1 = \int \frac{z\, dz}{\sqrt{P(z)}}$ يمكن حسابه بدلالة التكاملات و الدوال الإبتدائية و ذلك
بفرض أن $z^2 = \eta$.
و بالتالي فإنه سيكون لدينا في حالة $n = 4$ التكاملات التالية :

$$I_0 = \int \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, I_2 = \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{P(z)}}, H_1 = \int \frac{dz}{(z-b)\sqrt{P(z)}}$$

و التي تدعى بتكاملات ليجاندر الناقصية من النوع الأول و الثاني و الثالث على الترتيب ، و هي التكاملات(6.1)

⊛ سنبين الآن أن التكاملات الناقصية $I = \int R(z, \sqrt{P(z)})dz$
حيث أن $P(z) = A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)$ ، و $a_j \in \mathbb{C}$ $(1 \le j \le 4)$.
يعتمد حسابها على التكاملات (6.2) .
بأخذ $z = (at+b)/(ct+d)$ بحيث $abcd \neq 0$ ينتج أن:

$$; (j = 1,2,3,4) \quad z - a_j = \frac{(a - ca_j)t + b - da_j}{ct + d} \text{ ، و } dz = \frac{ad + bc}{(ct+d)^2}dt \text{ .}$$

و منه:

$$\frac{dz}{\sqrt{P(z)}} = \frac{dz}{\sqrt{A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}}$$

$$= \frac{(ad - bc)dt}{\sqrt{A[(a-ca_1)t + b - da_1][(a-ca_2)t + b - da_2][(a-ca_3)t + b - da_3][(a-ca_4)t + b - da_4]}}$$

لنعين الثوابت a,b,c,d بحيث تنعدم معاً معاملات t و t^3 .
إن:

$$A[(a-ca_1)t + b - da_1][(a-ca_2)t + b - da_2][(a-ca_3)t + b - da_3][(a-ca_4)t + b - da_4] \equiv [g_0t^2 + g_1t + g_2][h_0t^2 + h_1t + h_2]$$

حيث أن:

$$g_0 = (a-ca_1)(a-ca_2), g_1 = (a-ca_1)(b-da_2) + (a-ca_2)(b-da_1), g_2 = (b-da_1)(b-da_2)$$

و h_0, h_1, h_2 تنتج من g_0, g_1, g_2 بتبديل كل a_1 بـ a_3 و كل a_2 بـ a_4 .
حتى تكون أمثال t و t^3 معدومة معاً فإنه يجب أن يكون: $h_0g_1 + g_0h_1 = 0$ و $h_2g_1 + g_2h_1 = 0$
أي $g_1 = 0$ و $h_1 = 0$.
إذا كانت $g_1 = 0$ فإن: $2ab - (ad+bc)(a_1+a_2) + 2cda_1a_2 = 0$
و إذا كانت $h_1 = 0$ فإن: $2ab - (ad+bc)(a_3+a_4) + 2cda_3a_4 = 0$

و بما أن $ab \neq 0$ فإنه يمكننا كتابة المعادلتين السابقتين بالشكل:

$$2-\left(\frac{d}{b}+\frac{c}{a}\right)(a_1+a_2)+2\frac{d}{b}\frac{c}{a}a_1a_2=0$$

$$2-\left(\frac{d}{b}+\frac{c}{a}\right)(a_3+a_4)+2\frac{d}{b}\frac{c}{a}a_3a_4=0$$

و من هاتين المعادلتين يمكننا تحديد $\frac{d}{b}+\frac{c}{a}$ و $\frac{d}{b}\frac{c}{a}$ ، و بذلك يمكننا تحديد $\frac{c}{a},\frac{d}{b}$.

بتحقق الشروط السابقة ، الدالة $(g_0t^2+g_1t+g_2)(h_0t^2+h_1t+h_2)$ ، تصبح $(g_0t^2+g_2)(h_0t^2+h_2)$

و منه فإن:

$$\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}=\frac{(ad-bc)dt}{\sqrt{A(g_0t^2+g_2)(h_0t^2+h_2)}}=\frac{(ad-bc)dt}{\sqrt{Ag_2h_2\left((g_0/g_2)t^2+1\right)\left((h_0/h_2)t^2+1\right)}}$$

و بوضع $g_0/g_2=-p^2$, $h_0/h_2=-q^2$ ، نجد أن:

$$\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}=\frac{(ad-bc)dt}{\sqrt{Ag_2h_2\left(1-p^2t^2\right)\left(1-q^2t^2\right)}}$$

و بأخذ $t=u/p$ نجد أن:
$$\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}=\frac{1}{p}\frac{(ad-bc)du}{\sqrt{Ag_2h_2\left(1-u^2\right)\left(1-(q^2/p^2)u^2\right)}}$$

و بوضع $\mu=\frac{ad-bc}{p\sqrt{Ag_2h_2}}$ و $q^2/p^2=k^2$ نجد أن: $\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}=\frac{\mu du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$ ، و منه:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}=\mu\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

ندعو الوسيط k بالمقاس (modulus) .

و بذلك نجد أنه إذا كان لدينا التكامل الناقصي $\int R(z,s)dz$ ، حيث $s=\sqrt{P(z)}$ و $\deg P(z)=4$ ،

و باستخدام التحويلات و الفرضيات السابقة فإن التكامل $\int Q(z)/\sqrt{P(z)}\,dz$ حيث أن $Q(z)$ دالة كسرية ،

يصبح بالشكل $\int\frac{f(u)du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$ ، حيث أن $f(u)$ دالة كسرية بـ u . و يمكننا كتابتها بالشكل:

$$f(u)=\frac{\phi(u^2)+u\phi_1(u^2)}{\psi(u^2)+u\psi_1(u^2)}$$

حيث أن ϕ_1,ϕ,ψ_1,ψ هي كثيرات حدود.

بضرب بسط و مقام $f(u)$ بـ $\psi(u^2)+u\psi_1(u^2)$ فإن $f(u)$ تكتب بالشكل: $f(u)=f_1(u^2)+uf_2(u^2)$ ،

حيث أن f_1 و f_2 هي دوال كسرية بـ u . و بالتالي فإن:

$$\int\frac{f(u)du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=\int\frac{f_1(u^2)du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}+\int\frac{uf_2(u^2)du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}=J_1+J_2$$

التكامل J_2 يمكن حسابه بدلالة التكاملات الإبتدائية بأخذ $u^2=\eta$.

أما من أجل J_1 . بنفس الأسلوب الذي تم تناوله سابقاً نجد أن J_1 يمكن حسابه بدلالة التكاملات (6.2) .

و هذا يعني أن التكاملات الناقصية $\int R(z,s)dz$ ، حيث $s=\sqrt{P(z)}$ و $\deg P(z)=4$ ، يعتمد حسابها

على التكاملات E_1,E_2,E_3 ، أو على التكاملات $F(k,u),E(k,u),\ \Pi(k,N,u)$ ، و التي تدعى أيضاً

بتكاملات ليجاندر الناقصية النظامية من النوع الأول و الثاني و الثالث على الترتيب كما رأينا في الملاحظة (6.2) .

⊛ سنبين الآن أن التكاملات الناقصية $\int R(z,s)\,dz$ ، حيث $s=\sqrt{P(z)}$ و $\deg P(z)=4$ ، يعتمد حسابها على التكاملات (6.3).
لدينا:

$$\sqrt{P(z)}=\sqrt{A(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)}=(z-a_1)^2\sqrt{A\,\frac{z-a_2}{z-a_1}\,\frac{z-a_3}{z-a_1}\,\frac{z-a_4}{z-a_1}}$$

بوضع $\dfrac{z-a_4}{z-a_1}=t-e_1$ ، و منه $z=\dfrac{a_1t-a_1e_1-a_4}{t-e_1-1}$ ، و $dt=\dfrac{a_4-a_1}{(z-a_1)^2}dz$

و بوضع $\sqrt{A(a_1-a_2)(a_1-a_3)}=2M$ ، فإننا نجد أن:

$$\sqrt{P(z)}=2M\,\frac{(z-a_1)^2}{a_1-a_4}\sqrt{(t-e_1)\left[t-\left(e_1-\frac{a_2-a_4}{a_1-a_2}\right)\right]\left[t-\left(e_1-\frac{a_3-a_4}{a_1-a_3}\right)\right]}$$

لنختار e_1 بحيث يكون $3e_1-\dfrac{a_2-a_4}{a_1-a_2}-\dfrac{a_3-a_4}{a_1-a_3}=0$ ، و لنأخذ $e_2=e_1-\dfrac{a_2-a_4}{a_1-a_2}\ ,\ e_3=e_1-\dfrac{a_3-a_4}{a_1-a_3}$

عندئذ فإن:

$$\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}=\frac{-1}{M}\,\frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}=\frac{-1}{M}\,\frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$$

حيث أن: $g_2=-4(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)\ ,\ g_3=4e_1e_2e_3$

و نلاحظ أن اختيارنا للأعداد e_1,e_2,e_3 يحقق أن $e_1+e_2+e_3=0$.

و بالتالي إذا كان لدينا التكامل $\int\dfrac{R(z)\,dz}{\sqrt{P(z)}}$ حيث أن $P(z)$ كثيرة حدود من الدرجة الرابعة و R دالة كسرية،

فإنه باستخدام التحويل $\dfrac{z-a_4}{z-a_1}=t-e_1$ و باعتماد الترميزات السابقة نحصل على التكامل التالي:

$\int\dfrac{Q(t)\,dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$ ، حيث أن $Q(t)$ دالة كسرية بـ t .

و كما مر معنا سابقاً نجد أن هذا التكامل يعتمد في حسابه على التكاملات الثلاث التالية:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}\ ,\ \int\frac{t\,dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}\ ,\ \int\frac{dt}{(t-b)\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$$

حيث أن b جذر لمقام $Q(t)$ ، و التي هي تكاملات وايرشتراوس الناقصية من النوع الأول و الثاني و الثالث.

(6.3) ملاحظة:

إذا كان لدينا $P(t)=4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)$ ، فإنه بأخذ $t=A+\left(B/z^2\right)$ (A و B ثوابت). نجد أن:

$$\frac{dt}{\sqrt{P(t)}}=\frac{-B\,dz}{\sqrt{\left((A-e_1)z^2+B\right)\left((A-e_2)z^2+B\right)\left((A-e_3)z^2+B\right)}}$$

بأخذ $A=e_3$ ، نجد أن:

$$\frac{dt}{\sqrt{P(t)}}=\frac{-B\,dz}{\sqrt{B\left((e_3-e_1)z^2+B\right)\left((e_3-e_2)z^2+B\right)}}$$

و بأخذ $B=e_1-e_2$ و $k^2=(e_3-e_2)/(e_1-e_2)$ نجد أن:

$$\frac{dt}{\sqrt{P(t)}}=\frac{-1}{e_1-e_2}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

و بالتالي فإنه بـأخذ التحويل $t=e_3+\frac{e_1-e_2}{z^2}$ نجد أن تكاملات وايرشتراوس الناقصية النظامية تؤول إلى تكاملات ليجاندر الناقصية النظامية.

(6.4) ملاحظة:

إن كل تكامل ناقصي يعتمد في حسابه على $I_3(N)$ (التكامل الناقصي النظامي من النوع الثالث).
أي أن كل تكامل ناقصي يمكن التعبير عنه بدلالة التكاملات الناقصية النظامية من النوع الثالث فقط ، و هذا ما أثبته Ivan Niven في [17].
و من أجل ذلك سنبين أن التكاملات الناقصية النظامية من النوع الأول I_1 و الثاني I_2 تكتب بدلالة $I_3(N)$.
لدينا:

$$I_1=\int P^{-1/2}dt\ ,\ I_2=\int t^2P^{-1/2}dt\ ,\ I_3(N)=\int(1+Nt^2)P^{-1/2}dt$$

حيث أن: $P=P(t)=(at^2+b)(ct^2+d)\ ;\ abcd\neq 0$
كما أن:

$$\frac{d}{dt}\left(t^3P^{-1/2}\right)=t^2P^{-1/2}+\left(\frac{d}{c}+\frac{b}{d}\right)P^{-1/2}-\frac{d}{c}\left(1+\frac{c}{d}t^2\right)^{-1}P^{-1/2}-\frac{b}{a}\left(1+\frac{a}{b}t^2\right)^{-1}P^{-1/2}$$

و بالمكاملة نجد أن:

$$t^3P^{-1/2}=I_2+\left((d/c)+(b/a)\right)I_1-(d/c)I_3(c/d)-(b/a)I_3(a/b)\qquad ....\ (6.9)$$

و بالمثل فإنه بمكاملة العلاقة:

$$\frac{d}{dt}\left(t\,P^{-1/2}\right)=-P^{-1/2}+\left(1+(c/d)t^2\right)^{-1}P^{-1/2}+\left(1+(a/b)t^2\right)^{-1}P^{-1/2}$$

فإننا نجد أن:

$$I_1=-t\,P^{-1/2}+I_3(c/d)+I_3(a/b)\qquad ....\ (6.10)$$

من (6.10) نجد أن التكامل I_1 يكتب بدلالة $I_3(N)$ ، و بحذف I_1 من(6.9) و (6.10) نجد أن:

$$I_2=t^3P^{-1/2}+\left((d/c)+(b/a)\right)t\,P^{-1/2}-(b/a)I_3(c/d)-(d/c)I_3(a/b)\qquad ....\ (6.11)$$

و من (6.11) نجد أن I_2 يكتب بدلالة $I_3(N)$.
و إذا كانت التكاملات $I_1,I_2,I_3(N)$ بشكلها المثلثي أي بالشكل:

$$T_1=\int Q^{-1/2}d\phi\ \ ,\ \ T_2=\int Q^{1/2}d\phi\ \ ,\ \ T_3(N)=\int\left(1+N\sin^2\phi\right)Q^{-1/2}d\phi$$

حيث أن $Q=Q(\phi)=1-k^2\sin^2\phi$ و $k^2=bc/ad$.
فإنه بمكاملة العلاقتين التاليتين:

$$\frac{d}{d\phi}\left(Q^{-1/2}\tan\phi\right)=-Q^{-1/2}+Q^{-1/2}\left(1-k^2\sin^2\phi\right)^{-1}+Q^{-1/2}\left(1-\sin^2\phi\right)^{-1}$$

$$\frac{d}{d\phi}\left(k^2Q^{-1/2}\sin\phi\cos\phi\right)=Q^{1/2}-(1-k^2)\left(1-k^2\sin^2\phi\right)^{-1}Q^{-1/2}$$

نجد أن:

$$T_1=-Q^{-1/2}\tan\phi+T_3(-k^2)+T_3(-1)$$
$$T_2=k^2Q^{-1/2}\sin\phi\cos\phi+(1-k^2)T_3(-k^2)$$

"الفصل السابع"

الدوال الناقصية و المعادلة الجبرية ذات الدرجة الخامسة بشكلها العام

(7.1) مقدمة:

سنتناول في هذا الفصل أحد أهم التطبيقات لنظرية الدوال الناقصية في الجبر و هو حل المعادلة الجبرية ذات الدرجة الخامسة بشكلها العام[1] (quintic equation) . و قد كان هذا الموضوع أحد المواضيع القليلة التي كان لها انتشار واسع و اهتمام مركز في الرياضيات.

إذا كانت لدينا المعادلة:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \;\; ; n \ge 2 \,,\, a_j \in \mathbb{C} \; (\forall 1 \le j \le n) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \; (7.1)$$

فإنه باستخدام التحويل $y = x + (a_1/n)$ ، نجد أن (7.1) تصبح بالشكل:

$$y^n + b_2 y^{n-2} + \dots + b_n = 0 \;\; ; \;\; b_j \in \mathbb{C} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \; (7.2)$$

و بالتالي فإنه لحل المعادلة الجبرية ذات الدرجة الثالثة ($n = 3$) فإنه يكفي حل المعادلة $x^3 + ax + b = 0$ و كذلك لحل المعادلة الجبرية ذات الدرجة الرابعة ($n = 4$) فإنه يكفي حل المعادلة $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$.

في دراستنا في هذا الفصل تم الاعتماد على المراجع التالية: 31 ,30 ,19 ,5 ,3

المعادلات الجبرية ذات الدرجة الثانية و الثالثة و الرابعة:

⊛ **المعادلة التربيعية:** quadratic equation

لتكن المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0 \; ; \; a \ne 0, b, c \in \mathbb{C}$. عندئذ فإن جذورها تعطى بالشكل:

$$x_1, x_2 = \left(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \Big/ 2a$$

⊛ **المعادلة التكعيبية:** cubic equation

قام العالم الرياضي Cardano (1501-1576) ، بحل هذه المعادلة حوالي عام 1545 ، بالشكل التالي:

لتكن المعادلة:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \; ; \; a \ne 0 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \; (7.3)$$

بأخذ التحويل $y = x + (b/3a)$ ، نجد أن (7.3) تصبح بالشكل:

$$y^3 + py + q = 0 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \; (7.4)$$

حيث أن: $p = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{3a^2} \;,\; q = \dfrac{d}{a} - \dfrac{bc}{3a^2} + \dfrac{2b^3}{27a^2}$

---

[1] الشكل العام للمعادلة الجبرية ذات الدرجة الخامسة هو $x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$

حيث أن $a_j \in \mathbb{C} \; (1 \le j \le 5)$

و بأخذ التحويل[1] $y=z-(p/3z)$ - هذا التحويل يُنسب إلى Vieta - نحصل على المعادلة:

$$(z^3)^2+qz^3-(p^3/27)=0$$

و هي معادلة تربيعية بـ z^3 . بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ z^3 نجد أن: $z^3=\frac{-q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$

بإيجاد الجذور التكعيبية و التعويض في التحويل السابق أعلاه نحصل على ستة حلول للمعادلة (7.4) كل زوج من هذه الحلول سيكون متساوياً.

ملاحظة:

يمكن حل المعادلة التكعيبية $y^3+py+q=0$ باستخدام الدوال المثلثية[2] . حيث أن جذورها تُعطى بالشكل:

$$y_k=2\sqrt{-p/3}\cos\left((\phi+2\pi k)/3\right)\ ;\ k=0,1,2\ \&\ \phi=\cos^{-1}\left(-(q/2)\sqrt{-27/p^3}\right)$$

مثال توضيحي:

من أجل المعادلة:

$$(p=-15,\ q=-4)\qquad y^3-15y-4=0\qquad ....\quad (1)$$

بأخذ التحويل: $y=z-\left(p/z\right)=z+\left(5/z\right)$

نحصل على المعادلة:

$$(z^3)^2-4z^3+125=0\qquad ....\quad (2)$$

و التي هي معادلة تربيعية بـ z^3 ، بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ z^3 نجد أن: $z_1^3=2+11i\ ,\ z_2^3=2-11i$

الجذور التكعيبية للعدد $2+11i$ هي:

$$z_1=2+i$$
$$z_2=(2+i)w=\left(-2-\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-1)\right)\big/2$$
$$z_3=(2+i)w^2=\left(-2+\sqrt{3}-(2\sqrt{3}+1)\right)\big/2$$

حيث أن: $w=e^{2\pi i/3}=\left(-1/2\right)+\left(\sqrt{3}/2\right)i$. (أحد الجذور التكعيبية للواحد).

و الجذور التكعيبية للعدد $2-11i$ هي:

$$z_4=2-i=\bar{z}_1$$
$$z_5=(2-i)w=\left(\sqrt{3}-2+(2\sqrt{3}+1)\right)\big/2=\bar{z}_2$$
$$z_6=(2-i)w^2=\left(-2-\sqrt{3}-(2\sqrt{3}-1)\right)\big/2=\bar{z}_3$$

الأعداد $z_1,...,z_6$ هي جذور المعادلة (2)، و بالتعويض في التحويل المأخوذ في البداية نجد أن:

$$y_1=z_1+\left(5/z_1\right)=4\ ,\ y_2=z_2+\left(5/z_2\right)=-2-\sqrt{3}\ ,\ y_2=z_3+\left(5/z_3\right)=-2+\sqrt{3}$$

و بالمثل نجد أن: $y_4=4\quad ,\quad y_5=-2+\sqrt{3}\quad ,\quad y_6=-2-\sqrt{3}$

و بذلك نجد أنه تم الحصول على ستة حلول للمعادلة (1) كل زوج من هذه الحلول متساوي.

⊛ **المعادلة الجبرية ذات الدرجة الرابعة:** quartic equation

يُعتبر Ludovico Ferrari (1522-1565) أول من أوجد حل هذه المعادلة بشكلها العام[3]

إذ أنه يكفي لحلها حل المعادلة:

$$x^4+ax^2+bx+c=0\qquad ....\quad (7.5)$$

---

[1] أنظر [3],pp.277 ، [19],pp.62+63

[2] أنظر [5],pp.86

[3] أنظر [3],pp.278 ، [30],pp.132

و فكرة طريقة Ferrari هي أن نكتب x^4+ax^2+bx+c على شكل فرق مربعين بالشكل التالي:

$$x^4+ax^2+bx+c=\left(x^2+(a/2)+t\right)^2-\left(2t\,x^2-bx+(t^2+at-c+(a^2/4))\right)$$

$$=\left(x^2+(a/2)+t\right)^2-\left[2t\left(x-(b/4t)\right)^2-(b^2/8t)+\left(t^2+at-c+(a^2/4)\right)\right]$$

نختار t بحيث ينعدم المميز $\Delta=b^2-8t\left(t^2+at-c+(a^2/4)\right)$. عندئذ:

$$x^4+ax^2+bx+c=\left(x^2+(a/2)+t\right)^2-2t\left(x-(b/4t)\right)^2$$

و بالتالي فإنه بحل المعادلة التكعيبية التالية $b^2-8t\left(t^2+at-c+(a^2/4)\right)=0$ ،

و ليكن $t_0\neq 0$ أحد جذور هذه المعادلة. نجد أن:

$$x^2+(a/2)+t_0=\mp\sqrt{2t_0}\left(x-(b/4\,t_0)\right)$$

و بذلك سيكون لدينا معادلتين كل منهما من الدرجة الثانية ، بحلهما نحصل على حل المعادلة (7.5).

و لقد ظهرت العديد من الأبحاث و المقالات بهدف الحصول على أبسط طريقة لحل المعادلات الجبرية ذات الدرجة الثالثة و الرابعة ، مثل:

Pavan K.Malhotra ,1958, A New Method of Solving a Quartic, Amer. Math. Monthly, vol.65, pp.280-282

J.E.Hacke,Jr., 1941, A simple solution of the general quartic, Amer. Math. Monthly, vol.48, pp. 327-328

Morton J.Hellman,1958, A unifing technique for the solution of the quadratic,cubic and quartic , Amer. Math. Monthly,vol.65, pp.274-276

نلاحظ مما سبق أنه عند حل المعادلات الجبرية ذات الدرجة الثانية و الثالثة و الرابعة فإن لحلولها (جذورها) صيغة واضحة بدلالة المعاملات تتضمن فقط عمليات الجمع و الطرح و الضرب و القسمة و الجذور من المرتبة الثانية و الثالثة لتعابير بدلالة معاملات المعادلة ، مثل هذه الحلول تدعى بالحلول الجذرية (radical solutions) أو الحلول الجبرية (algebraic solutions) و نقول إن هذه المعادلات قابلة للحل جبرياً (soluble algebraically)[1].

إن النجاح في إيجاد الحلول الجذرية للمعادلات ذات الدرجة الثانية و الثالثة و الرابعة قد حفّز بشكل طبيعي للبحث عن الحلول الجذرية للمعادلة ذات الدرجة الخامسة، و قد توالت الجهود و المحاولات للعديد من العلماء في إيجاد الحلول الجذرية لمعادلة الدرجة الخامسة بشكلها العام مثل:

Paulo Ruffini(1765-1822) ، Lagrange(1736-1813) ، Vandermonde(1735-1796) ، Euler(1707-1783) ، Leibniez(1646-1716) ، Tschirnhaus(1651-1708) .

إلا أن محاولاتهم قد باءت بالفشل ، و في عام 1826 نجح N.H.Abell (1802-1829) في إثبات أنه لا يمكن حل المعادلات التي درجتها أكبر أو تساوي 5 بشكلها العام، جبرياً[2].

و أبسط شكل لمعادلة الدرجة الخامسة تكون فيها غير قابلة للحل جبرياً هو $x^5+ax+b=0$ و هذا الشكل يدعى بشكل Bring[3].

و في عام 1858 كان العالم الرياضي الفرنسي Charles Hermite(1822-1901) أول من طرح فكرة استخدام الدوال الناقصية و الدوال ثيتا في حل معادلة الدرجة الخامسة بشكلها العام.

و كذلك كان كل من Kronecher (1823-1891) و Francesco Brioschi (1824-1897) أيضاً من الأوائل في طرح هذه الفكرة.

كما أنه ظهرت أبحاث في حل معادلة الدرجة الخامسة باستخدام الدوال فوق الهندسية.

---

1 أنظر [3],pp.278

2 أنظر [30],pp.140

3 Erland Samuel Bring (1736-1798) عالم رياضيات سويدي

(7.2) مبرهنة:
المعادلة $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + ... + p_n = 0$ يمكن تخفيضها إلى المعادلة التالية:

$$y^n + q_4y^{n-4} + q_5y^{n-5} + ... + q_n = 0$$

و ذلك بأخذ التحويل $y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$ ، و الذي يدعى بتحويل Tschirnhaus .

⊛من المبرهنة (7.2) نستنتج أن المعادلة ذات الدرجة الخامسة تصبح باستخدام تحويل Tschirnhaus بالشكل: $y^5 + q_4y + q_5 = 0$ (شكل Bring) .
و إذا كانت $q_4 \neq 0$ فإنه يمكننا تخفيض هذه المعادلة إلى الشكل[1] : $y^5 + 5y = a$ حيث $a \in \mathbb{C}$.
و الشكل الأخير هو الشكل الذي ستتركز عليه دراستنا.

(7.3) المخطط العام لدراسة حل المعادلة الجبرية ذات الدرجة الخامسة:
ليكن لدينا المعادلة:

$$x^5 + p_1x^4 + p_2x^3 + p_3x^2 + p_4x + p_5 = 0 \quad ; p_j \in \mathbb{C}\ (1 \leq j \leq 5)$$

سيتم إنجاز حل هذه المعادلة على عدة خطوات:
(1) باستخدام تحويل Tschirnhaus، نحصل على شكل Bring وهو $y^5 + q_4y + q_5 = 0$
و بعدها نخفض شكل Bring ($q_4 \neq 0$) إلى الشكل:

$$y^5 + 5y = a \qquad .... \quad (7.6)$$

(2) إيجاد المعادلة المعيارية (modular equation):

$$u^6 + v^6 - u^5v^5 + 4uv = 0 \qquad .... \quad (7.7)$$

و هي معادلة من الدرجة السادسة بـ v جذورها الستة هي:

$$v_\infty = f(5\tau)\ , v_c = f\left((\tau + c)/5\right)\ ; c = 0,1,2,3,4$$

حيث أن: $u = f(\tau) = q^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}) \ ; q = e^{\pi i\tau}, \tau \in \mathcal{H}$ (أنظر4.9.6)

(3) إثبات أن: $a = \left(f_1^8 - f_2^8\right) / f^2$ ، حيث أن:

$$f_1(\tau) = q^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}) \ , \ f_2(\tau) = \sqrt{2}\,q^{1/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})$$ (أنظر 4.9.6)

(4) نوجد حل المعادلة $f^{24} - a^2f^{12} - 64 = 0$ ، و التي هي من الدرجة الثانية بـ f^{12}.
بفرض أن $f^{12}(\tau) = l$ أحد جذري هذه المعادلة ، أي $f^{24}(\tau) = l^2$ ، و منه نوجد τ و ذلك بأخذ العكس لـf^{24}،
و هذا ممكن لأنه مهما يكن $0 \neq c \in \mathbb{C}$ فإن الدالة f^{24} تأخذ القيمة c مرة واحدة فقط في المجموعة التالية[2]:

$$D = \left\{\tau \in \mathcal{H};\ |\tau| \geq 1\ , |\mathrm{Re}\,\tau| \leq 1\right\}$$

(5) من أجل τ التي أوجدناها في (4) نوجد جذور المعادلة المعيارية (7.7) و التي هي $v_c(\tau)\ , v_\infty(\tau)$.
(6) نوجد $w_k = w_k(\tau)$ ($k = 0,1,2,3,4$) من العلاقة:

$$w_k(\tau) = \frac{\left(v_\infty(\tau) - v_k(\tau)\right)\left(v_{k+1}(\tau) - v_{k-1}(\tau)\right)\left(v_{k+2}(\tau) - v_{k-2}(\tau)\right)}{\sqrt{5}u^3(\tau)} \ ; k = 0,1,2,3,4, u = f(\tau)$$

(7) نعوض قيم w_k ($k = 0,1,2,3,4$) في العلاقة:

$$y_k = y_k(\tau) = \frac{f_1^8(\tau) - f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)\left((w_k(\tau))^2 + 5\right)} \quad ; \ k = 0,1,2,3,4$$

---
[1] أنظر [30],pp.147 ، [31],pp.168
[2] أنظر [30],pp.176 ، [3],pp.307

فنحصل على الجذور y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 للمعادلة (7.6).

(7.4) استنتاج المعادلة المعيارية $u^6 + v^6 - u^5 v^5 + 4uv = 0$:

إن استنتاج المعادلة المعيارية (7.7) سيتم أيضاً على عدة مراحل.

لدينا $f(\tau) = q^{-1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})$ حيث $\tau \in \mathcal{H}$ ، $q = e^{\pi i \tau}$ ، و ليكن[1] $u = f(\tau)$ ، و:

$$v_\infty = f(5\tau) \;,\; v_c = f\left((\tau + c)/5\right) \;;\; c = 0,1,2,3,4 \qquad .... \qquad (7.8)$$

سنرى لاحقاً أن v_∞, v_c هي جذور المعادلة المعيارية (7.7).

سنقوم بدراسة سلوك الدوال u, v_c (كدوال بـ τ) عندما: $\tau \mapsto \tau + 2, \tau \mapsto -\tau^{-1}, \tau \mapsto (\tau - 1)/(\tau + 1)$

من أجل هذه التحويلات سيكون لدينا على الترتيب المصفوفات التالية:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

و نلاحظ من (7.8) أنه لدينا المصفوفات:

$$P_\infty = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; P_c = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 5 \end{pmatrix} ;\; c = 0,1,2,3,4 \qquad .... \qquad (7.9)$$

و محدد كل مصفوفة من المصفوفات في (7.9) يساوي 5 .

إلا أنه إذا كانت P مصفوفة بحيث $\det P = 5$ و كانت $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ فإن $\det AP = 5$. كما أنه يمكننا التعبير عن $f(AP\tau)$ بدلالة $f(P\tau)$ ، و ذلك لأنه يمكننا كتابة المصفوفة A بدلالة T و S (المبرهنة2.2.2) و لأن:

$$f(T\tau) = e^{-\pi i/24} f_1(\tau) \;,\; f(S\tau) = f(\tau) \;,\; f_1(T\tau) = e^{-\pi i/24} f(\tau) \;,\; f_1(S\tau) = f_2(\tau)$$

$$f_2(T\tau) = e^{\pi i/12} f_2(\tau) \;,\; f_2(S\tau) = f_1(\tau)$$

لذلك فإننا سنوجد أبسط شكل لـ P (P هي أحد المصفوفات P_c حيث $c = 0,1,2,3,4$) بحيث إذا ضربناها من اليسار بـ A فإن $f(AP\tau)$ تُخفّض إلى $f(P\tau)$.

لنفرض أن:

$$P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \;;\; p, q, r, s \in \mathbb{Z} \;\&\; \det P = 5$$

و ليكن $c, d \in \mathbb{Z}$ بحيث $cp + dr = 0$ والقاسم المشترك الأعظم للعددين c و d يساوي الواحد، عندئذ فإنه يوجد $a, b \in \mathbb{Z}$ بحيث $ad - bc = 1$ فإذا كانت $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ فإن:

$$AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' & q' \\ 0 & s' \end{pmatrix} = P'$$

لدينا $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ حيث $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، و منه:

$$T^n P' = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' & q' \\ 0 & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' & q' + ns' \\ 0 & s' \end{pmatrix}$$

فإذا اخترنا n بحيث يكون $(-s/2) \le q' \le (s/2)$. أي $q' = -2, -1, 0, 1, 2$ ، و منه $s' = 5, p' = 1$ أو $s' = 1, p' = 5$ ، و سيكون لدينا المصفوفات الست التالية:

$$P_\infty = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, P_{\mp 1} = \begin{pmatrix} 1 & \mp 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, P_{\mp 2} = \begin{pmatrix} 1 & \mp 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

---

[1] اختصاراً كتبنا u, v_∞, v_c بدلاً من $u(\tau), v_\infty(\tau), v_c(\tau)$

و هي المصفوفات (7.9) بالمقاس 5 ، أي أن $P_{-1}=P_4\ ,\ P_{-2}=P_3$
حيث أن $-1\equiv 4(\bmod 5)\ ,\ -2\equiv 3(\bmod 5)$.

(7.4.1) التحويل $\tau \mapsto \tau+2$:
سنبين أنه عندما $\tau \mapsto \tau+2$ فإن $v_c \mapsto e^{-5\pi i/12}v_{c+2}$ حيث أن $c=\infty,0,1,2,3,4$.
لدينا: $f(\tau+1)=e^{-\pi i/24}f_1(\tau)\ ,\ f(\tau+2)=e^{-\pi i/12}f(\tau)\ ,\ f(\tau+48)=f(\tau)$
و منه عندما $\tau \mapsto \tau+2$ فإن $u \mapsto e^{-\pi i/12}u$ ، و $v_\infty = f(5\tau)\mapsto f(5\tau+10)$ ، لكن:

$$
\begin{aligned}
f(5\tau+10) &= \left(e^{\pi i(5\tau+10)}\right)^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\pi i(5\tau+10)}\right)^{2n-1}\right] \\
&= \left(e^{5\pi i\tau}\right)^{-1/24}\left(e^{10\pi i}\right)^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{5\pi i\tau}\right)^{2n-1}\left(e^{10\pi i}\right)^{2n-1}\right] \\
&= e^{-5\pi i/12}f(5\tau)\ \ ;\ \left(e^{10\pi i}\right)^{2n-1}=1
\end{aligned}
$$

و منه $v_\infty \mapsto e^{-5\pi i/12}v_\infty$.
بما أن $f(\tau)$ دالة دورية دورها يساوي 48 ، فإن:

$$v_c = f\left(\frac{\tau+c}{5}\right)=f\left(\frac{\tau+c}{5}+m48\right)=f\left(\frac{\tau+c+240m}{5}\right)\ ;\ m\in\mathbb{Z}$$

إلا أن: $c\equiv(c+240)(\bmod 240)$ ، و بالتالي فإنه بالمقاس 240 سيكون لدينا الزمرة الجمعية $\mathbb{Z}_{240}=\{0,1,2,...,239\}$ ، و التي يمكن تقسيمها إلى 48 مجموعة كل منها مؤلفة من 5 عناصر متطابقة مثنى مثنى بالمقاس 48 ، و كل واحد من هذه العناصر متطابق مع 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 بالمقاس 5 ، و بالتالي فإن كل عنصر من أحد المجموعات الثمان و الأربعين سيكون متطابق بالمقاس 5 مع عنصر واحد فقط من عناصر المجموعات المتبقية.
فإذا كانت $\{0,48,96,144,192\}$ إحدى هذه المجموعات ، فنلاحظ أن:

$$0\equiv 0(\bmod 5),48\equiv 3(\bmod 5),96\equiv 1(\bmod 5),144\equiv 4(\bmod 5),192\equiv 2(\bmod 5)$$

و بذلك فإنه يمكننا أخذ عناصر المجموعة $\{0,48,96,144,192\}$ كتمثيل لباقي عناصر المجموعات المتبقية.
و بالتالي فإننا سنأخذ $v_c=f\left((\tau+c)/5\right)$ بحيث $c\equiv 0(\bmod 48)$ ، و منه:

$$v_{48}=f\left((\tau+48)/5\right),v_{96}=f\left((\tau+96)/5\right),...$$

و ينتج من ذلك أن $v_c=v_d$ إذا كانت $c\equiv d\,(\bmod 5)$.
و هذا يعني أنه بما أن $\mp 48\equiv \pm 2(\bmod 5)\ \&\ \mp 96\equiv \mp 1(\bmod 5)$ ، فإن:

$$v_{\pm 2}=f\left((\tau\mp 48)/5\right),v_{\mp 1}=f\left((\tau\mp 96)/5\right)$$

كما أن: $v_{-2}=v_3\ ,v_{-1}=v_4$.
و بالتالي فإنه عندما $\tau\mapsto\tau+2$ فإن:

$$
\begin{aligned}
v_c = f\left(\frac{\tau+c}{5}\right)\mapsto f\left(\frac{\tau+2+c}{5}\right) &= f\left(\frac{\tau+50-48+c}{5}\right)=f\left(\frac{\tau+c-48}{5}+10\right) \\
&= f\left(\frac{\tau+c'}{5}+10\right)\ ;\ c'=c-48 \\
&= e^{-5\pi i/12}f\left((\tau+c')/5\right)=e^{-5\pi i/12}v_{c'}
\end{aligned}
$$

حيث أن $c'=c-48\equiv 0(\bmod 48)$ و $c'\equiv(c+2)(\bmod 5)$ ، أي أن $v_{c'}=v_{c+2}$.
و مما سبق نستنتج أنه عندما $\tau\mapsto\tau+2$ فإن:

$$v_c\mapsto e^{-5\pi i/12}v_{c+2}\quad ;c=0,1,2,3,4$$

(7.4.2) التحويل $\tau \mapsto -\tau^{-1}$:

سنبين أنه عندما $\tau \mapsto -\tau^{-1}$ فإن $v_\infty \mapsto v_0$ و $v_c \mapsto v_{-1/c}$ بحيث $c = 0, \mp1, \mp2$.

في البداية نلاحظ أنه بما أن $f(S\tau) = f(\tau)$ ، أي $f(-1/\tau) = f(\tau)$

فإنه عندما $\tau \mapsto -\tau^{-1}$ نجد أن $u \mapsto u$ ، بالإضافة إلى أن:

$$v_\infty = f(5\tau) \mapsto f(-5/\tau) = f(\tau/5) = v_0 \Rightarrow v_\infty \mapsto v_0$$

$$v_0 = f(\tau/5) \mapsto f(-1/5\tau) = f(5\tau) \Rightarrow v_0 \mapsto v_\infty$$

من أجل $v_{\pm1}, v_{\pm2}$ ، لدينا:

$$v_{\pm2} = e^{\pm5\pi i/12} f\left((\tau \pm 2)/5\right) \quad .... \quad (7.10)$$

$$v_{\pm1} = e^{\mp5\pi i/6} f\left((\tau \mp 4)/5\right) \quad .... \quad (7.11)$$

لأن:

$$v_{+2} = v_{-48} = f\left(\frac{\tau - 48}{5}\right) = f\left(\frac{\tau - 50 + 2}{5}\right) = f\left(\frac{\tau + 2}{5} - 10\right)$$

$$= \left(e^{\pi i(\tau+2)/5}\right)^{-1/24} \left(e^{-10\pi i}\right)^{-1/24} \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \left(e^{\pi i(\tau+2)/5}\right)^{2n-1} \left(e^{-10\pi i}\right)^{2n-1}\right]$$

$$= e^{5\pi i/12} f\left((\tau+2)/5\right) \;\; ; \;\; \left(e^{-10\pi i}\right)^{2n-1} = 1$$

و بالمثل $v_{-2} = e^{-5\pi i/12} f\left((\tau - 2)/5\right)$ ، كما أن:

$$v_{+1} = v_{96} = f\left(\frac{\tau + 96}{5}\right) = f\left(\frac{\tau + 100 - 4}{5}\right) = f\left(\frac{\tau - 4}{5} + 20\right)$$

$$= e^{-5\pi i/6} \left(e^{\pi i(\tau-4)/5}\right)^{-1/24} \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \left(e^{\pi i(\tau-4)/5}\right)^{2n-1}\right] = e^{-5\pi i/6} f\left((\tau - 4)/5\right)$$

و بالمثل $v_{-1} = e^{5\pi i/6} f\left((\tau + 4)/5\right)$.

و بالتالي عندما $\tau \mapsto -\tau^{-1}$ فإنه من (7.10) و (7.11) نجد أن:

$$v_{\pm2} \mapsto e^{\pm5\pi i/12} f\left((-\tau^{-1} \pm 2)/5\right) = e^{\pm5\pi i/12} f\left((\pm2\tau - 1)/5\tau\right) \quad .... \quad (7.12)$$

$$v_{\pm1} \mapsto e^{\mp5\pi i/6} f\left((-\tau^{-1} \mp 4)/5\right) = e^{\mp5\pi i/6} f\left((\mp4\tau - 1)/5\tau\right) \quad .... \quad (7.13)$$

⊛ سنبين الآن أن $v_{-2} \mapsto v_{-2}$.

نلاحظ من (7.12) أنه سيكون لدينا المصفوفة $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ،

ولنوجد المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ ، بحيث $AP = -P_{-2}$. أي:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

و منه $a = -2, b = -1, c = 5, d = 2$ ، و بالتالي فإن $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ و $P = -A^{-1}P_{-2}$.

لكن $A^{-1} = ST^2ST^{-2}S$ ، و بالتالي $P = -ST^2ST^{-2}SP_{-2}$ ، و منه:

$$
\begin{aligned}
f(P\tau) &= f\left((-2\tau-1)/5\tau\right) = f\left(-ST^{2}ST^{-2}SP_{-2}\right) = f\left(ST^{2}ST^{-2}S\left((\tau-2)/5\right)\right)\\
&= f\left(T^{2}ST^{-2}S\left((\tau-2)/5\right)\right) \qquad ; f(S\tau) = f(\tau)\\
&= e^{-\pi i/12} f\left(ST^{-2}S\left((\tau-2)/5\right)\right) \; ; f(T\tau) = e^{-\pi i/24} f_1(\tau) \,\&\, f_1(T\tau) = e^{-\pi i/24} f(\tau)\\
&= e^{-\pi i/12} f\left(T^{-2}S\left((\tau-2)/5\right)\right) \quad ; f(S\tau) = f(\tau)\\
&= f\left(S\left((\tau-2)/5\right)\right) \qquad ; f(T^{-2}\tau) = e^{\pi i/12} f(\tau)\\
&= f\left((\tau-2)/5\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (7.14)
\end{aligned}
$$

و منه عندما $\tau \mapsto -\tau^{-1}$ ، فإنه يكون لدينا من (7.12) و (7.14) :

$$
v_{-2} \mapsto e^{-5\pi i/12} f\left((-2\tau-1)/5\tau\right) = e^{-5\pi i/12} f\left((\tau-2)/5\right) = e^{-5\pi i/12} f\left((\tau+48-50)/5\right)
$$

$$
= f\left((\tau+48)/5\right) = v_{-2}
$$

و بالتالي فإن $v_{-2} \mapsto v_{-2}$. و بالمثل نبرهن أن $v_2 \mapsto v_2$.

إلا أنه مهما يكن $x \in \{1,2,3,4\}$ (مجموعة بواقي القسمة على 5 باستثناء الصفر) فإنه يوجد $x^{-1} = y \in \{1,2,3,4\}$ بحيث $x \cdot y \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$.

فمثلاً $x = 2$ عندئذ $(2)(3) = 6 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5)$ ، و منه فإن $3 \equiv (1/2) (\mathrm{mod}\, 5)$.

إلا أن $3 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 5)$ ، و منه $-2 \equiv (1/2) (\mathrm{mod}\, 5)$ ، كما أن $2 \equiv (-1/2) (\mathrm{mod}\, 5)$.

أي أن $c \equiv (-1/c) (\mathrm{mod}\, 5)$ ، حيث $c = \mp 2$. و بالتالي فإنه عندما $\tau \mapsto -\tau^{-1}$ فإن:

$$
v_{-2} \mapsto v_{1/2} \; , \; v_2 \mapsto v_{-1/2}
$$

⊛ و من أجل $v_{\mp 1}$ سنبين أن $v_1 \mapsto v_{-1}$ ، و بالمثل $v_{-1} \mapsto v_1$.

نلاحظ من (7.13) أنه سيكون لدينا المصفوفة $P' = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ، و لنوجد المصفوفة $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ من $SL(2,\mathbb{Z})$ ، بحيث $A'P' = -P_{-1}$ حيث أن $P_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ، أي:

$$
\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}
$$

و منه: $a' = -1, b' = -1 , c' = 5 , d' = 4$ ، و بالتالي فإن $A'^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ و $P' = -A'^{-1}P_{-1}$.

لكن $A'^{-1} = STST^{-4}S$ ، و بالتالي $P' = -STST^{-4}SP_{-1}$. و منه:

$$
\begin{aligned}
f(P'\tau) &= f\left((-4\tau-1)/5\tau\right) = f\left(-STST^{-4}S(\tau-1/5)\right)\\
&= f\left(TST^{-4}S(\tau-1/5)\right) \qquad ; f(-S\tau) = f(\tau)\\
&= e^{-\pi i/24} f_1\left(ST^{-4}S(\tau-1/5)\right) \quad ; f(T\tau) = e^{-\pi i/24} f_1(\tau)\\
&= e^{-\pi i/24} f_2\left(T^{-4}S(\tau-1/5)\right) \qquad ; f_1(S\tau) = f_2(\tau)\\
&= e^{-\pi i/24} e^{-4\pi i/12} f_2\left(S(\tau-1/5)\right) \; ; f_2(T^{-4}\tau) = f_2(\tau-4) = e^{-4\pi i/12} f_2(\tau)\\
&= e^{-9\pi i/24} f_1\left((\tau-1)/5\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (7.15)
\end{aligned}
$$

إلا أن: $f_1\left(\frac{\tau-1}{5}\right) = f_1\left(\frac{\tau-1}{5}+1-1\right) = f_1\left(\frac{\tau+4}{5}-1\right)$ ، و

$$f_1(\tau-1)=\left(e^{\pi i(\tau-1)}\right)^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(e^{\pi i(\tau-1)}\right)^{2n-1}\right]$$
$$=\left(e^{\pi i\tau}\right)^{-1/24}e^{\pi i/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(-e^{\pi i\tau}\right)^{2n-1}\right]=e^{\pi i/24}f(\tau)$$

و بالتالي: $f_1\left((\tau-1)/5\right)=f_1\left(((\tau+4)/5)-1\right)=e^{\pi i/24}f\left((\tau+4)/5\right)$

نعوض في (7.15) فنجد أن:

$$f\left((-4\tau-1)/5\tau\right)=e^{-9\pi i/24}\cdot e^{\pi i/24}\cdot f\left((\tau+4)/5\right)=e^{-8\pi i/24}\cdot f\left((\tau+4)/5\right)$$
$$=e^{-\pi i/3}\cdot f\left((\tau+4)/5\right) \qquad .... \quad (7.16)$$

و بذلك يكون لدينا عندما $\tau\mapsto-\tau^{-1}$. من (7.13):

$$v_1\mapsto e^{-5\pi i/6}f\left((-4\tau-1)/5\tau\right)=e^{-5\pi i/6}\cdot e^{-\pi i/3}\cdot f\left((\tau+4)/5\right)=f\left((\tau-96)/5\right)=v_{-1}$$

أي أن: $v_1\mapsto v_{-1}$.

مما سبق نستنتج أنه عندما $\tau\mapsto-\tau^{-1}$ فإن: $v_c\mapsto v_{-1/c}\ \ ;c=0,\mp1,\mp2\ \ \&\ \ v_\infty\mapsto v_0$

حيث أن:

$3\equiv-2(\bmod 5)\ ,\ 4\equiv-1(\bmod 5)$ و $c\equiv(-1/c)(\bmod 5)\ ;c=\mp2$

(7.4.3) التحويل $\tau\mapsto(\tau-1)/(\tau+1)$:

سنبين الآن أنه عندما $\tau\mapsto(\tau-1)/\tau+1$ فإن $v_c\mapsto-\sqrt{2}/v_d$ حيث $d=(c-1)/(c+1)$ و $c=\infty,0,1,2,3,4$.

لدينا $u=f(\tau)$ و نعلم أن $f(\tau)f\left((\tau-1)/(\tau+1)\right)=\sqrt{2}$ ، و منه $f\left((\tau-1)/(\tau+1)\right)=\sqrt{2}/f(\tau)$

و بالتالي فإنه عندما $\tau\mapsto(\tau-1)/(\tau+1)$ فإن $u\mapsto\sqrt{2}/u$.

لدينا $v_c=f\left((\tau+c)/5\right)$ و $v_\infty=f(5\tau)$ ، و لتكن $\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}$ مصفوفة ممثلة لـ v_c ($c=\infty,0,1,2,3,4$)

و منه فإن:

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\in\left\{P_{\pm1}=\begin{pmatrix}1&\pm1\\0&5\end{pmatrix},\ P_{\pm2}=\begin{pmatrix}1&\pm2\\0&5\end{pmatrix},\ P_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix},\ P_\infty=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

حيث $v_{-1}=v_4,v_{-2}=v_3$ ، و بالتالي $v_c=f\left[\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\tau\right]$.

و منه عندما $\tau\mapsto(\tau-1)/(\tau+1)$ فإن $v_c\mapsto f\left[\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\tau\right]$

سنقوم الآن بإيجاد المصفوفة $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$ بحيث:

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\0&z\end{pmatrix} \qquad .... \quad (7.17)$$

و بعدها نحسب $f\left((\tau'-1)/(\tau'+1)\right)$ حيث أن $\tau'=\begin{pmatrix}x&y\\0&z\end{pmatrix}\tau$.

و باستخدام العلاقة $f(\tau)f\left((\tau-1)/(\tau+1)\right)=\sqrt{2}$ يمكننا إيجاد علاقات التحويل المطلوبة.

بأخذ المحدد لطرفي (7.17) نجد أن: $\det\begin{pmatrix}x&y\\0&z\end{pmatrix}=xz=5$

⊛ **إيجاد المصفوفة** $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$:

نضرب طرفي (7.17) بـ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ من اليسار فنجد أن:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

و بالمقارنة بين العنصرين الواقعين في السطر الثاني و العمود الثاني من الطرفين نجد:

$$(1)\quad (\gamma-\alpha)(a+b)+(\delta-\beta)d = 0 \quad , \quad (2)\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

من أجل v_0 تصبح (7.17) بالشكل:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

و العلاقات (1) ، (2) تصبح بالشكل:

$$(1)\quad (\gamma-\alpha)+5(\delta-\beta)=0 \quad , \quad (2)\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$$

لنأخذ $\gamma-\alpha=-5$ و $\delta-\beta=1$ فنجد أن (1) محققة ، و نجد أن $\beta=\delta-1$ و $\alpha=\gamma+5$. و منه:

$(\gamma+5)\delta-\gamma(\delta-1)=1$ ، أي $5\delta+\gamma=1$.

بأخذ $\beta=0$ و منه $\delta=1$ و $\gamma=-4$ و $\alpha=1$ ، أي $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

و منه: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$

و بالتالي فإن $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

و منه من أجل v_0 يكون لدينا المساواة التالية:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad .... \quad (7.18)$$

سنبين الآن أن $v_0 \longmapsto -\sqrt{2}/v_4$ ، و ذلك بالاستفادة بشكل أساسي من (7.18) و من العلاقة التالية:

$$f(\tau)f\left((\tau-1)/(\tau+1)\right)=\sqrt{2} \qquad .... \quad (7.19)$$

لدينا:

$$f\left(\tau/(-4\tau+1)\right)=f\left(4-\tau^{-1}\right) \qquad ; \; f\left(-1/\tau\right)=f(\tau)$$

$$=\left(e^{\pi i(4-\tau^{-1})}\right)^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\pi i(4-\tau^{-1})}\right)^{2n-1}\right]$$

$$=e^{-4\pi i/24}f(-\tau^{-1})=e^{-4\pi i/24}f(\tau) \qquad .... \quad (7.20)$$

من الطرف الأيمن لـ (7.18) و العلاقة (7.19) نجد أن:

$$f\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\tau\right]=f\left(\frac{\tau'-1}{\tau'+1}\right) \qquad ; \; \tau'=\frac{\tau+4}{5}$$

$$=\sqrt{2}/f(\tau')=\sqrt{2}/f\left((\tau+4)/5\right)$$

و من الطرف الأيسر لـ (7.18) نجد أن: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\tau=\frac{1}{5}\frac{\tau-1}{\tau+1}:=\tau^*$

و منه $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\tau^*=\frac{\tau^*}{-4\tau^*+1}$ ، و سيكون:

$$f\left[\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\tau\right]=f\left(\frac{\tau^*}{-4\tau^*+1}\right)$$
$$=e^{-4\pi i/24}f(\tau^*) \qquad ; \text{ from } (7.20)$$
$$=e^{-4\pi i/24}f\left(\frac{1}{5}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)\right)$$

و بالتالي فإن: $f\left(\frac{1}{5}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)\right)=\frac{e^{\pi i/6}\sqrt{2}}{f\left((\tau+4)/5\right)}$ ، لكن:

$$f\left((\tau+4)/5\right)=f\left[\left((\tau-96)/5\right)+20\right]=f\left[\left((\tau-96)/5\right)+10+10\right]$$
$$=\left(e^{\pi i(\tau-96)/5}\right)^{-1/24}e^{-10\pi i/24}e^{-10\pi i/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\pi i(\tau-96)/5}\right)^{2n-1}\right]$$
$$=e^{-5\pi i/6}f\left((\tau-96)/5\right)$$

و بالتالي فإن:

$$f\left(\frac{1}{5}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)\right)=\frac{e^{\pi i/6}\sqrt{2}}{e^{-5\pi i/6}f\left((\tau-96)/5\right)}=\frac{-\sqrt{2}}{f\left((\tau-96)/5\right)}=\frac{-\sqrt{2}}{v_4}$$

و بالتالي فإنه عندما $\tau\mapsto(\tau-1)/\tau+1$ فإن:

$$v_0\mapsto f\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\tau\right]=f\left(\frac{1}{5}\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{v_4}$$

أي: $v_0\mapsto-\sqrt{2}/v_4$.

بشكل مماثل لما سبق (من أجل الحصول على (7.18)) نجد أنه من أجل v_∞ يكون لدينا المساواة:

$$\begin{pmatrix}1&-4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4\\0&5\end{pmatrix} \qquad .... \quad (7.21)$$

و من أجل v_1 يكون:

$$\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix} \qquad .... \quad (7.22)$$

و من أجل v_4 يكون:

$$\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad .... \quad (7.23)$$

و من أجل v_2 يكون:

$$\begin{pmatrix}-2&1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\0&-5\end{pmatrix} \qquad .... \quad (7.24)$$

⊛سنبرهن الآن أن $v_\infty\mapsto-\sqrt{2}/v_1$ ، و ذلك بالاستفادة بشكل أساسي من (7.21) و (7.19) . بالشكل:
عندما $\tau\mapsto(\tau-1)/\tau+1$ فإن: $v_\infty=f(5\tau)\mapsto f\left(5(\tau-1)/(\tau+1)\right)$.
من الطرف الأيمن لـ (7.21) نجد أن:

$$f\left[\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-4\\0&5\end{pmatrix}\tau\right]=f\left(\frac{\tau'-1}{\tau'+1}\right) \qquad ; \ \tau'=\frac{\tau-4}{5}$$
$$=\sqrt{2}/f(\tau')=\sqrt{2}/f\left((\tau-4)/5\right)$$

و من الطرف الأيسر لـ (7.21) نجد أن:

$$f\left[\begin{pmatrix}1 & -4\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\tau\right]=f\left(5\frac{\tau-1}{\tau+1}-4\right)=\left(e^{\pi i\left(5\frac{\tau-1}{\tau+1}-4\right)}\right)^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\pi i\left(5\frac{\tau-1}{\tau+1}-4\right)}\right)^{2n-1}\right]$$

$$=\left(e^{\pi i\left(5\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)}\right)^{-1/24}\left(e^{-4\pi i}\right)^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\pi i\,(5(\tau-1)/\tau+1)}\right)^{2n-1}\left(e^{-4\pi i}\right)^{2n-1}\right]$$

$$=e^{4\pi i/24}f\left(5(\tau-1)/(\tau+1)\right)$$

و بالتالي فإن:

$$f\left(5(\tau-1)/(\tau+1)\right)=e^{-4\pi i/24}\sqrt{2}/f\left((\tau-4)/5\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (7.25)$$

إلا أن: $f\left((\tau-4)/5\right)=e^{20\pi i/24}f\left((\tau+96)/5\right)$ ، و منه بالتعويض في (7.25) نجد أن:

$$f\left(5(\tau-1)/(\tau+1)\right)=e^{-\pi i}\sqrt{2}/f\left((\tau+96)/5\right)=-\sqrt{2}/f\left((\tau+96)/5\right)=-\sqrt{2}/v_1$$

و بالتالي: $v_\infty\mapsto-\sqrt{2}/v_1$.

⊛ لنبرهن الآن أن $v_4\mapsto-\sqrt{2}/v_\infty$.

$$v_4=v_4(\tau)\mapsto v_4\left((\tau-1)/(\tau+1)\right)=v_4(\gamma)=v_{-96}(\gamma)=f\left((\gamma-96)/5\right)$$

حيث أن $\gamma=(\tau-1)/(\tau+1)$ ، و ليكن $\delta=(\gamma-1)/5$ ، و منه $\delta=-2/5(\tau+1)$.

من الطرف الأيمن لـ (7.23) نجد أن:

$$f\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\tau\right]=f\left(\frac{5\tau-1}{5\tau+1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{f\,(5\tau)}$$

و من الطرف الأيسر لـ (7.23) نجد أن:

$$f\left[\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\tau\right]=f\left(\frac{3\delta+1}{2\delta+1}\right)$$

و بالتالي فإن: $f\left(\frac{3\delta+1}{2\delta+1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{f\,(5\tau)}$. إلا أن:

$$f\left(\frac{3\delta+1}{2\delta+1}\right)=f\left(\frac{\delta}{2\delta+1}+1\right)=e^{-\pi i/24}f_1\left(\frac{\delta}{2\delta+1}\right)=e^{-\pi i/24}f_2\left(-\frac{2\delta+1}{\delta}\right)$$

$$=e^{-\pi i/24}f_2(-2-\delta^{-1})=e^{-5\pi i/24}f_1(\delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (7.26)$$

كما أن:

$$f\left(\frac{\gamma-96}{5}\right)=f\left(\frac{\gamma-1}{5}-19\right)=f\left(\frac{\gamma-1}{5}-20+1\right)$$

$$=e^{-\pi i/24}f_1\left(\frac{\gamma-1}{5}-20\right) \qquad ;\quad f\,(\tau+1)=e^{-\pi i/24}f_1(\tau)$$

$$=e^{-\pi i/24}\left(e^{\pi i\left(\frac{\gamma-1}{5}-20\right)}\right)^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(e^{\pi i\left(\frac{\gamma-1}{5}-20\right)}\right)^{2n-1}\right]$$

$$=e^{-\pi i/24}e^{20\pi i/24}\left(e^{\pi i\,((\gamma-1)/5)}\right)^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(e^{\pi i\,((\gamma-1)/5)}\right)^{2n-1}\left(e^{-20\pi i/24}\right)^{2n-1}\right]$$

$$=e^{19\pi i/24}f_1\left((\gamma-1)/5\right)=e^{19\pi i/24}f_1(\delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (7.27)$$

و بالتالي من (7.26) و (7.27) نجد أن:

$$v_4(\gamma)=f\left((\gamma-96)/5\right)=e^{19\pi i/24}f_1(\delta)=e^{-5\pi i/24}f_1(\delta)=-f\left((3\delta+1)/(2\delta+1)\right)$$
$$=-\sqrt{2}/f(5\tau)=-\sqrt{2}/v_\infty$$

و بالتالي فإنه عندما $\tau\mapsto(\tau-1)/\tau+1$ ، فإن: $v_4\mapsto-\sqrt{2}/v_\infty$.

⊛ لنبرهن الآن أن $v_1\mapsto-\sqrt{2}/v_0$.

عندما $\tau\mapsto(\tau-1)/\tau+1$ يكون:

$$v_1(\tau)\mapsto v_1\left((\tau-1)/(\tau+1)\right)=v_1(\gamma)=f\left((\gamma+96)/5\right)\quad;\ \gamma=(\tau-1)/(\tau+1)$$

لكن:

$$v_1\left((\tau-1)/(\tau+1)\right)=v_1(\gamma)=f\left((\gamma+96)/5\right)=f\left(((\gamma+1)/5)+19\right)$$
$$=\left(e^{\pi i((\gamma+1)/5)}\right)^{-1/24}\left(e^{19\pi i}\right)^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\pi i((\gamma+1)/5)}\right)^{2n-1}\left(e^{19\pi i}\right)^{2n-1}\right]$$
$$=e^{-19\pi i/24}f_1\left((\gamma+1)/5\right)\qquad;\ \left(e^{19\pi i}\right)^{2n-1}=-1$$
$$=e^{-19\pi i/24}f_1(\delta)\quad;\ \delta=(\gamma+1)/5\qquad..................\ (7.28)$$

من الطرف الأيمن للعلاقة (7.22) نجد أن:

$$f\left[\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\tau\right]=f\left(\frac{(\tau/5)-1}{(\tau/5)+1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{f(\tau/5)}$$

و من الطرف الأيسر للعلاقة (7.22) نجد أن:

$$f\left[\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\tau\right]=f\left(\frac{3\delta-1}{-2\delta+1}\right)\quad;\ \delta=\frac{\gamma+1}{5}$$

و بالتالي فإن:

$$f\left(\frac{3\delta-1}{-2\delta+1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{f(\tau/5)}\qquad..................\ (7.29)$$

إلا أن:

$$f\left(\frac{3\delta-1}{-2\delta+1}\right)=e^{\pi i/24}f_1\left(\frac{3\delta-1}{-2\delta+1}+1\right)\qquad;\ f_1(\tau+1)=e^{-\pi i/24}f(\tau)$$
$$=e^{\pi i/24}f_1\left(\delta/(-2\delta+1)\right)=e^{\pi i/24}f_2\left((2\delta-1)/\delta\right)\quad;\ f_1(\tau)=f_2(-\tau^{-1})$$
$$=e^{\pi i/24}e^{\pi i/12}f_2\left(1-(1/\delta)\right)=e^{5\pi i/24}f_1(\delta)\qquad;\ f_2(\tau+1)=e^{\pi i/12}f_2(\tau)$$

أي أن:

$$f\left(\frac{3\delta-1}{-2\delta+1}\right)=e^{5\pi i/24}f_1(\delta)\qquad................\ (7.30)$$

و بالتالي فإنه من (7.28) و (7.29) و (7.30) نجد أن:

$$v_1(\gamma)=e^{-19\pi i/24}f_1(\delta)=-e^{5\pi i/24}f_1(\delta)=-f\left((3\delta-1)/(-2\delta+1)\right)=-\sqrt{2}/f\left(\tau/5\right)=-\sqrt{2}/v_0$$

و بالتالي فإنه بالتحويل $\tau\mapsto(\tau-1)/\tau+1$ ، نجد أن: $v_1\mapsto-\sqrt{2}/v_0$.

بشكل مماثل لما سبق نجد أنه عندما $\tau\mapsto(\tau-1)/\tau+1$ فإن:

$$v_2\mapsto-\sqrt{2}/v_2\ ,\ v_3\mapsto-\sqrt{2}/v_3$$

و يمكننا تلخيص النتائج التي حصلنا عليها من (7.4.1) و (7.4.2) و (7.4.3) بالجدول التالي:

	u	v_∞	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
$\tau \mapsto \tau+2$	αu	εv_∞	εv_2	εv_3	εv_4	εv_0	εv_1
$\tau \mapsto -\tau^{-1}$	u	v_0	v_∞	v_4	v_2	v_3	v_1
$\tau \mapsto (\tau-1)/(\tau+1)$	$\sqrt{2}/u$	$-\sqrt{2}/v_1$	$-\sqrt{2}/v_4$	$-\sqrt{2}/v_0$	$-\sqrt{2}/v_2$	$-\sqrt{2}/v_3$	$-\sqrt{2}/v_\infty$

الجدول (1)

حيث $u=u(\tau)=f(\tau)$ ، و $v_c=v_c(\tau)=f\left((\tau+c)/5\right)$ $(c=0,1,2,3,4)$ ، و $v_\infty=v_\infty(\tau)=f(5\tau)$
و $v_{-1}=v_4$ ، $v_{-2}=v_3$ ، و $\varepsilon=e^{-5\pi i/12}$ ، $\alpha=e^{-\pi i/12}$.

(7.5) استنتاج المعادلة المعيارية و حل المعادلة الجبرية ذات الدرجة الخامسة:

لتكن لدينا التحويلات:

$$\tau \mapsto \tau+2\ ,\ \tau \mapsto -\tau^{-1}\ ,\ \tau \mapsto (\tau-1)/(\tau+1) \qquad .... \quad (7.31)$$

نلاحظ أن الدالة $F(\tau)=f^{24}(\tau)+2^{12}f^{-24}(\tau)$ صامدة -invariant- بالنسبة للتحويلات (7.31). حيث أن:

$$\tau \mapsto \tau+2 \quad ; \quad F(\tau) \mapsto F(\tau+2)=F(\tau)$$

$$\tau \mapsto -\tau^{-1} \quad ; \quad F(\tau) \mapsto F(-\tau^{-1})=F(\tau)$$

$$\tau \mapsto \frac{\tau-1}{\tau+1} \quad ; \quad F(\tau) \mapsto F\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)=f^{24}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)+2^{12}f^{-24}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}\right)$$

$$=f^{24}(\tau)+2^{12}f^{-24}(\tau)=F(\tau)$$

و بما أن: $f(\tau)=q^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})$ ، فإن:

$$F(\tau)=q^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}\right)^{24}+2^{12}q\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}\right)^{-24}=q^{-1}+24+... \qquad .... \quad (7.32)$$

من جدول التحويلات (1) يمكننا أن نستنتج جدول التحويلات المماثل من أجل الدوال uv_c ، u/v_c ،
حيث أن $u=u(\tau)=f(\tau)$ ، و $v_c=f\left((\tau+c)/5\right)$ $(c=0,1,2,3,4)$ ، $v_\infty(\tau)=f(5\tau)$.
بالشكل التالي:

	uv_c	u/v_c
$\tau \mapsto \tau+2$	$e^{-\pi i/2}uv_{c+2}$	$e^{\pi i/3}u/v_{c+2}$
$\tau \mapsto -\tau^{-1}$	$uv_{-1/c}$	$u/v_{-1/c}$
$\tau \mapsto \frac{\tau-1}{\tau+1}$	$-2/uv_{\frac{c-1}{c+1}}$	$-v_{\frac{c-1}{c+1}}/u$

الجدول (2)

لنأخذ الآن الدالة[1]:

$$\prod_c (A_c-B_c)^2 \quad ; \quad c=\infty,0,1,2,3,4$$

أي: $\prod_c (A_c-B_c)^2=(A_\infty-B_\infty)^2(A_0-B_0)^2(A_1-B_1)^2(A_2-B_2)^2(A_3-B_3)^2(A_4-B_4)^2$

حيث أن: $A_c=A_c(\tau)=\left(u/v_c\right)^3+\left(v_c/u\right)^3\ ,\ B_c=B_c(\tau)=(uv_c)^2-4/(uv_c)^2$

[1] الدالة $\prod_c (A_c-B_c)^2$ هي دالة بـ τ حيث أن A_c و B_c هي دوال بـ τ

من الجدول (2) يمكننا أن نجد التحويلات للدوال $A_c\,,B_c$ و الموضحة بالجدول التالي:

	A_c	B_c
$\tau \mapsto \tau+2$	$-A_{c+2}$	$-B_{c+2}$
$\tau \mapsto -\tau^{-1}$	$A_{-c^{-1}}$	$B_{-c^{-1}}$
$\tau \mapsto \dfrac{\tau-1}{\tau+1}$	$-A_{\frac{c-1}{c+1}}$	$-B_{\frac{c-1}{c+1}}$

الجدول (3)

و بذلك نجد أن الدالة $\prod_c (A_c - B_c)^2$ صامدة بالنسبة للتحويلات (7.31) .

لدينا $A_c - B_c = 0$ عندما $q = 0$ (أي عندما $\operatorname{Im}\tau \to \infty$) و ذلك من أجل كل[1] $c \in \{\infty,0,1,2,3,4\}$

و منه: $(u/v_c)^3 + (v_c/u)^3 = (uv_c)^2 - 4/(uv_c)^2$

و بالتالي فإن: $(u/v)^3 + (v/u)^3 = (uv)^2 - 4/(uv)^2$

حيث أنها معادلة من الدرجة السادسة جذورها v_c $(c = \infty,0,1,2,3,4)$. أي:

$$v^6 + u^6 - u^5 v^5 + 4uv = 0 \qquad .... \quad (7.33)$$

و هذه هي المعادلة المعيارية المطلوبة.

كما أن: $v_\infty v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 = (-1)^6 u^6 = u^6$ ، أي:

$$\prod_c v_c = u^6 \qquad .... \quad (7.34)$$

⊛ **حل المعادلة ذات الدرجة الخامسة:**

لتكن الحدودية (كثيرة الحدود):

$$\prod_{k=1}^{4}(w - w_k) = w^5 + D_1 w^4 + D_2 w^3 + D_3 w^2 + D_4 w + D_1 \qquad .... \quad (7.35)$$

و التي جذورها[2] w_k معرفة بالشكل[3] :

$$w_k = w_k(\tau) := \frac{(v_\infty - v_k)(v_{k+1} - v_{k-1})(v_{k+2} - v_{k-2})}{\sqrt{5}u^3} \qquad .... \quad (7.36)$$

بحيث $k = 0,1,2,3,4$ ، و $u = f(\tau)$

بالمطابقة بين طرفي (7.35) و (7.36) نجد أن:

$$D_1 = -(w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4)$$
$$D_2 = w_{04} + w_{14} + w_{24} + w_{34} + w_{03} + w_{13} + w_{23} + w_{02} + w_{12} + w_{01}$$

$$D_3 = -\left(w_{034} + w_{134} + w_{234} + w_{124} + w_{024} + w_{014} + w_{123} + w_{023} + w_{013} + w_{012}\right)$$
$$D_4 = w_{1234} + w_{0234} + w_{0134} + w_{0124} + w_{0123}$$
$$D_5 = -w_0 w_1 w_2 w_3 w_4 = -w_{01234}$$

حيث أن: $w_{ij} = w_i w_j$ ، $w_{ijk} = w_i w_j w_k$ ، ...

---

[1] أنظر [3],pp.302

[2] الجذور w_k هي دوال بـ τ حيث أن $w_k = w_k(\tau)$ و كذلك D_j ($1 \le j \le 5$) هي دوال بـ τ

[3] إن تعريف w_k اقترح من قِبل Hermite .

و من الجدولين (1) و (2) يمكننا أن نوجد جدول التحويلات لـ w_k . بالشكل:

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
$\tau \mapsto \tau+2$	$-w_2$	$-w_3$	$-w_4$	$-w_0$	$-w_1$
$\tau \mapsto -\tau^{-1}$	w_0	w_2	w_1	w_4	w_3
$\tau \mapsto (\tau-1)/(\tau+1)$	$-w_0$	$-w_3$	$-w_4$	$-w_2$	$-w_1$

الجدول (4)

و منه فإن الدوال $D_1{}^2, D_2, D_3{}^2, D_4, D_5{}^2$ (كدوال بـ τ) غير متغيرة بالنسبة للتحويلات (7.31).

و بالتالي فإنه يمكننا التعبير عنها على شكل حدودية بـ :

$u^{24}+2^{12}u^{-24}=q^{-1}+24+\ldots \quad ; u=u(\tau)=f(\tau)$ ([3],pp.300+303 ، [30],pp.167).

و الحدودية بـ $u^{24}+2^{12}u^{-24}$ ليست ثابتة ، فقط ، عندما يكون نشر لوران لها وفق قوى لـ q مبتدئاً بـ βq^r ، حيث أن $\beta \in \mathbb{C}$ و $r \le -1$. أي أنها تملك قطب من المرتبة الأولى على الأقل. ([3],pp.303 ،[30],pp.167)

و بما أن $f(\tau)=q^{-1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}\right)$ حيث $q=e^{\pi i\tau}$ ، فإننا نلاحظ أن الحد الأول من نشر v_c هو $(q')^{-1/24}$ ، حيث أن:

$$q'=e^{5\pi i\tau} \qquad ;c=\infty$$
$$=e^{\pi i(\tau+c)/5} \quad ; c\ne\infty\,(c=0,1,2,3,4)$$

و الحد الأول من نشر w_k هو:

$$\frac{q^{-5/24}q^{-1/20}\left(\alpha^{k+1}-\alpha^{k-1}\right)q^{-1/20}\left(\alpha^{k+2}-\alpha^{k-2}\right)}{\sqrt{5}\,q^{-1/8}}=\frac{q^{-1/10}\alpha^{2k}\left(\alpha^3-\alpha-\alpha^{-1}-\alpha^{-3}\right)}{\sqrt{5}}=\alpha^{2k}q^{-1/10}$$

حيث أن $\alpha=e^{-4\pi i/5}$.

أي أن أول حد في نشر w_0,w_1,w_2,w_3,w_4 موضح بالجدول:

	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
أول حد في النشر	$q^{-1/10}$	$\alpha^2q^{-1/10}$	$\alpha^4q^{-1/10}$	$\alpha^6q^{-1/10}$	$\alpha^8q^{-1/10}$

و منه فإن أول حد في نشر D_l $(l=1,2,3,4,5)$ موضح أيضاً بالجدول:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
أول حد في النشر	$\lambda q^{-1/10}$	$P_1(\alpha)q^{-2/10}$ أو: $\beta_1 q^n ; n\ge\frac{-2}{10}$	$P_2(\alpha)q^{-3/10}$ أو: $\beta_2 q^n ; n\ge\frac{-3}{10}$	$P_3(\alpha)q^{-4/10}$ أو: $\beta_3 q^n ; n\ge\frac{-4}{10}$	$-\alpha^2\alpha^4\alpha^6\alpha^8q^{-5/10}$

حيث أن: $\lambda=-(1+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^8)$ ، و $P_1(\alpha),P_2(\alpha),P_3(\alpha)$ هي كثيرات حدود بـ α .

و نلاحظ أن نشر D_l $(l=1,2,3,4,5)$ يبدأ بـ $q^{-l/10}$ أو بحد من الشكل βq^n حيث $n\ge -l/10$

و بالتالي فإن نشر $D_1{}^2$ يبدأ بـ $q^{-2/10}$ ، و D_2 يبدأ بـ $q^{-2/10}$ أو بـ q^{-n} حيث $n\ge 2/10$ ،

و $D_3{}^2$ يبدأ بـ $q^{-6/10}$ أو بـ q^{-n} حيث $n\ge 6/10$ ، و D_4 يبدأ بـ $q^{-4/10}$ أو بـ q^{-n} حيث $n\ge 4/10$.

و بذلك ستكون $D_1{}^2,D_2,D_3{}^2,D_4$ ثوابت.

إلا أن نشر $D_5{}^2$ يبدأ بالحد $\left(\alpha^2\alpha^4\alpha^6\alpha^8\right)^2q^{-1}=q^{-1}$ ، و بالتالي فإن $D_5{}^2$ ليست ثابت ، و منه فإن $D_5{}^2$ هي كثيرة حدود بـ $u^{24}+2^{12}u^{-24}=q^{-1}+24+\ldots$.

و بالتالي فإن:

$$D_5^{\ 2} = u^{24} + 2^{12}u^{-24} + C \qquad .... \quad (7.37)$$

حيث C ثابت. و من أجل إيجاد قيمة C فإننا سنوجد $v_c(i)$ حيث $c = \infty, 0, 1, 2, 3, 4$.

سنبرهن أولاً أن $u(i) = f(i) = \sqrt[4]{2}$.

لدينا: $f^8(\tau) = f_1^{\ 8}(\tau) + f_2^{\ 8}(\tau) \ , \ f(\tau)f_1(\tau)f_2(\tau) = \sqrt{2}$

و بما أن $-1/i = i$ و $f_1(\tau) = f_2(-\tau^{-1})$ ، فإن $f_1(i) = f_2(i)$

و منه فإن $f^8(i) = f_1^{\ 8}(i) + f_2^{\ 8}(i) = 2f_1^{\ 8}(i)$

كما أن $f(i)f_1(i)f_2(i) = \sqrt{2}$ و منه $f(i) = \sqrt{2}/f_1^{\ 2}(i)$ و بالتالي:

$$f^4(i) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{f_1^{\ 8}(i)} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{f^8(i)/2} = \frac{2^3}{f^8(i)} \Rightarrow f^{12}(i) = 2^3 \Rightarrow f(i) = 2^{1/4}$$

أي $u(i) = f(i) = \sqrt[4]{2}$

لدينا:

$$v_3(\tau) = v_{-2}(\tau) = v_{48}(\tau) = f\left((\tau+48)/5\right) = e^{-5\pi i/12} f\left((\tau-2)/5\right)$$

و منه فإن $\left((i-2)/5\right) f\, e^{-5\pi i/12} = v_3(i)$ ، إلا أن $5 = (2-i)(2+i)$ و منه فإن:

$$v_3(i) = e^{-5\pi i/12} f\left((i-2)/(2+i)(2-i)\right) = e^{-5\pi i/12} f\left(-1/(2+i)\right) = e^{-5\pi i/12} f(2+i)$$
$$= e^{-5\pi i/12} e^{-\pi i/12} f(i) = e^{-\pi i/2} f(i) = -i\sqrt[4]{2}$$

و بالمثل نجد أن $v_2(i) = i\sqrt[4]{2}$.

و بالتالي فإنه بأخذ $\tau = i$ فإن المعادلة المعيارية (7.33) تصبح بالشكل:

$$u^6(i) + v^6 - u^5(i)v^5 + 4u(i)v = 0$$

لكن $u(i) = \sqrt[4]{2} := a$ و منه:

$$v^6 - a^5v^5 + 4av + a^6 = 0$$
$$\Rightarrow v^6 - a^5v^5 + a^9v + a^6 = 0 \qquad .... \quad (7.38)$$

المعادلة (7.38) جذورها هي $v_\infty(i), v_0(i), v_1(i), v_2(i), v_3(i), v_4(i)$ ، حيث أن:

$$v_2(i) = ia \ , v_3(i) = -ia \ , \ a = \sqrt[4]{2}$$

و بتقسيم $v^6 - a^5v^5 + a^9v + a^6$ على $\left(v - v_2(i)\right)\left(v - v_3(i)\right) = v^2 + a^2$ ، فإن الناتج سيكون مساوياً لـ $v^4 - a^5v^3 - a^2v^2 + a^7v + a^4$.

لكن بأخذ:

$$v^4 - a^5v^3 - a^2v^2 + a^7v + a^4 \equiv (v-\xi)^2(v-\eta)^2$$
$$= v^4 - 2(\xi+\eta)v^3 + \left((\xi+\eta)^2 + 2\xi\eta\right)v^2 - 2\xi\eta(\xi+\eta)v + \xi^2\eta^2$$

نجد بالمطابقة أن: $\xi+\eta = a \ , \ \xi\eta = -a^2$ ، و بذلك نجد أن:

$$v^4 - a^5v^3 - a^2v^2 + a^7v + a^4 = (v-\xi)^2(v-\eta)^2$$

حيث $\xi+\eta = a \ , \ \xi\eta = -a^2$ ، و بالحل المشترك نجد:

$$\eta_1 = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \Rightarrow \xi_1 = \frac{a(1-\sqrt{5})}{2} \quad , \quad \eta_2 = \frac{a(1-\sqrt{5})}{2} \Rightarrow \xi_2 = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

نلاحظ أن: $v_\infty(i) = f(5i) = f\left(-1/5i\right) = f\left(i/5\right) = v_0(i)$ ، و منه $v_1(i) = v_4(i)$

و $v_\infty(i) > 0$ لأن $f(\tau) > 0$ عندما $\tau = i\alpha$ حيث $\alpha > 0$.

و بالتالي فإنه بأخذ $0 < \xi$ و $\eta > 0$ نجد أن:

$$v_0(i) = v_\infty(i) = \xi = \sqrt[4]{2}\left(1+\sqrt{5}\right)/2 \quad , \quad v_1(i) = v_4(i) = \eta = \sqrt[4]{2}\left(1-\sqrt{5}\right)/2$$

بتعويض قيم $v_c(i)$ $(c = \infty, 0, 1, 2, 3, 4)$ التي حصلنا عليها ، في (7.36) نجد أن:

$$w_0(i) = 0 \ , w_1(i) = w_2(i) = i\sqrt{5} \ , w_3(i) = w_4(i) = -i\sqrt{5}$$

و الحدودية (7.35) عندما $\tau = i$ تصبح بالشكل:

$$\left(w - w_0(i)\right)\left(w - w_1(i)\right)\left(w - w_2(i)\right)\left(w - w_3(i)\right)\left(w - w_4(i)\right) = w(w - i\sqrt{5})^2(w + i\sqrt{5})^2$$
$$= w(w^2+5)^2$$

و منه:

$$w(w^2+5)^2 = w^5 + 10w^3 + 25w = w^5 + D_1(i)w^4 + D_2(i)w^3 + D_3(i)w^2 + D_4(i)w + D_5(i)$$

و بالمطابقة نجد أن $D_5(i) = 0$ أي $D_5^2(i) = 0$ ، و هذا الذي سيفيدنا في حساب قيمة الثابت C في (7.37) و إيجاد $D_5(\tau)$ كتابع لـ τ .

و من المطابقة أيضاً نجد أن: $D_1(i) = 0 \ , D_2(i) = 10 \ , D_3(i) = 0 \ , D_4(i) = 25$. و منه:

$D_1(\tau) = 0 \ , D_2(\tau) = 10 \ , D_3(\tau) = 0 \ , D_4(\tau) = 25$ ، و ذلك مهما تكن $\tau \in \mathcal{H}$.

و بالتالي فإنه من أجل $\tau = i$ في (7.37) نجد أن:

$$C = -\left(u^{24}(i) + 2^{12}u^{-24}(i)\right) = -(2^6 + 2^6) = -2^7$$

و منه فإن:

$$D_5^2(\tau) = D_5^2 = u^{24}(\tau) + 2^{12}u^{-24}(\tau) - 2^7 = \left(u^{12}(\tau) - 2^6u^{-12}(\tau)\right)^2$$

أي: $D_5(\tau) = \mp\left(u^{12}(\tau) - 2^6u^{-12}(\tau)\right)$.

إلا أن نشر $D_5(\tau) = -w_0w_1w_2w_3w_4$ يبدأ بـ $-q^{1/2}$ ، و $u^{12} - 2^6u^{-12}$ يبدأ بـ $q^{1/2}$ ($q = e^{\pi i \tau}$) ، و بالتالي فإن: $D_5 = D_5(\tau) = -u^{12}(\tau) + 2^6u^{-12}(\tau)$

و منه فإن المعادلة $w^5 + D_1(\tau)w^4 + +D_2(\tau)w^3 + D_3(\tau)w^2 + D_4(\tau)w + D_5(\tau) = 0$ تصبح بالشكل:

$$w^5 + 10w^3 + 25w + 2^6u^{-12}(\tau) - u^{12}(\tau) = 0$$

أي:

$$w(w^2+5)^2 - u^{12}(\tau) + 64u^{-12}(\tau) = 0 \quad ; w = w(\tau) \qquad .... \quad (7.39)$$

و المعادلة (7.39) من الدرجة الخامسة جذورها $w_0(\tau), w_1(\tau), w_2(\tau), w_3(\tau), w_4(\tau)$ ، و المعادلة $w(w^2+5)^2 = 0$ من الدرجة الخامسة جذورها $w_k(i)$ $(k = 0,1,2,3,4)$.

باستخدام العلاقات $f(\tau)f_1(\tau)f_2(\tau) = \sqrt{2} \quad , \quad f^8(\tau) = f_1^8(\tau) + f_2^8(\tau)$ ، نجد أن:

$$u^{12}(\tau) + 64u^{-12}(\tau) = \frac{f^{24}(\tau) - 64}{f^{12}(\tau)} = \frac{f^{16}(\tau) - 2\left(\sqrt{2}\right)^8 f^{-8}(\tau)}{f^4(\tau)}$$
$$= \frac{\left(f_1^8(\tau) + f_2^8(\tau)\right)^2 - 4f_1^8(\tau)f_2^8(\tau)}{f^4(\tau)} = \left(\frac{f_1^8(\tau) - f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)}\right)^2$$

و بالتالي فإنه من (7.39) نجد أن: $w(w^2+5)^2 = \left(\dfrac{f_1^8(\tau) - f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)}\right)^2$

أي: $\sqrt{w(\tau)} = \mp\dfrac{f_1^8(\tau) - f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)\left(w^2(\tau)+5\right)}$ ، و بأخذ $y = y(\tau) = \dfrac{f_1^8(\tau) - f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)\left(w^2(\tau)+5\right)}$ ، نجد أن:

$$y(y^4+5)=y^5+5y=\frac{f_1^8(\tau)-f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)} \quad .... \quad (7.40)$$

و المعادلة (7.40) هي معادلة من الدرجة الخامسة بـ y (شكل Bring) جذورها الخمسة هي $y_k(\tau)$ $(k=0,1,2,3,4)$ ، حيث أن:

$$y_k(\tau)=\frac{f_1^8(\tau)-f_2^8(\tau)}{f^2(\tau)\left(w_k^2(\tau)+5\right)} \quad .... \quad (7.41)$$

عندما يكون $\left(f_1^8-f_2^8\right)/f^2=a$ و ذلك مهما تكن $a\in\mathbb{C}$ و بحيث $f_1=f_1(\tau),\ f_2=f_2(\tau),\ f=f(\tau)$

أي: $f_1^8-f_2^8=af^2$ ، فإن: $\left(f_1^8-f_2^8\right)^2=a^2f^4$ ، و بالتالي فإن:

$$f_1^{16}+f_2^{16}-2f_1^8f_2^8=a^2f^4$$

$$\Rightarrow \left(f_1^8+f_2^8\right)^2-2f_1^8f_2^8-2f_1^8f_2^8-a^2f^4=0$$

$$\Rightarrow \left(f^8\right)^2-4\left(\sqrt{2}\right)^8f^{-8}-a^2f^4=0 \qquad ;f_1^8+f_2^8=f^8,\ f\,f_1f_2=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f^{16}-64f^{-8}-a^2f^4=0$$

$$\Rightarrow f^{24}-a^2f^{12}-64=0 \quad .... \quad (7.42)$$

و المعادلة (7.42) من الدرجة الثانية بـ f^{12} ، بفرض أن $f^{12}(\tau)=\lambda$ لأحد جذري هذه المعادلة فإن $f^{24}(\tau)=\lambda^2=\mu$ ، و من هنا[1] يمكننا إيجاد τ .

و بالتالي فإنه من أجل حل المعادلة ذات الدرجة الخامسة بشكلها العام نخفضها أولاً إلى شكل Bring التالي:
$y^5+5y=a$ ، بحيث $a=\left(f_1^8-f_2^8\right)/f^2$.

ثم نحل المعادلة $f^{24}(\tau)-a^2f^{12}(\tau)-64=0$.

و بفرض أن $f^{12}(\tau)=\lambda$ ، نوجد τ بحيث $f^{12}(\tau)=\lambda$ ، و من أجل τ هذه التي أوجدناها نحسب $v_c(\tau)$ حيث $c=\infty,0,1,2,3,4$ ، و بعدها نوجد من (7.36) قيم $w_k(\tau)$ حيث $k=0,1,2,3,4$.

و من ثم نوجد $y_k(\tau)$ من (7.41) حيث $k=0,1,2,3,4$ ، و التي هي جذور المعادلة $y^5+5y=a$

و بالتعويض في التحويلات التي باستخدامها خفّضنا المعادلة المعطاة إلى شكل Bring ، نوجد جذور المعادلة المعطاة.

---

[1] مهما يكن $0\neq c\in\mathbb{C}$ ، فإن الدالة $f^{24}(\tau)$ تأخذ القيمة c مرة واحدة فقط في المجموعة:
$D=\left\{\tau\in\mathcal{H};|\tau|\geq 1,|\operatorname{Re}\tau|\leq 1\right\}$. أنظر [30],pp.176 ، [3],pp.307 .

المراجع :

[1] M.Abramowitz and I.A.Stegun ,**1970**, Handbook of Mathematical Functions with Formulas,Graphs and Mathematical Tables

[2] L.V.Ahlfors ,**1966**, Complex Analysis, second edition, New York, McGraw-Hill

[3] J.V.Armitage and W.F.Eberlein , **2006**, Elliptic Functions ,Cambridge University Press.

[4] Aysekiper ,**1984**,Series Coefficients for Power of the Jacobian Elliptic Functions, Math.Comp., Vol.43,No.167,pp.247-259.

[5] R.Bruce King ,**1996**, Beyond the Quartic Equation, Birkhauser Boston.

[6] E.T.Copson ,**1935**, An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable, Oxford ,Oxford University Press.

[7] B.C.Carlson ,**2002**,Three Improvements in Reduction and Computation of Elliptic Integrals , J.Res.Natl.Inst.Stand.Technol.,Vol.107, Num.5,pp.413-418.

[8] __________,**2004**,Symmetric in c,d,n of Jacobian elliptic functions, J.Math.Anal.Appl.299,pp.242-253.

[9] _________ ,**2006**,Some reformulated properties of Jacobian elliptic functions, J.Math.Anal.Appl.223,pp.522-529.

[10] J.D.Fenton and R.S.Gardiner-Garden,**1982**,Rapidly convergent methods for evaluating elliptic integrals and theta and elliptic functions, J.Austral.Math.Soc. (series B),pp.47-58.

[11] E.Freitg and R.Busam , **2005** , Complex Analysis, Springer-Verlag.

[12] Gartha Jones and David Singerman ,**1987**, Complex Functions, an algebraic and geometric view point , Cambridge University Press.

[13] Gregory L.Bakerand and James A.Blackburn ,**2005**,The Pendulum ,A Case Study in Physics, Oxford,Oxford University Press.

[14] H.Hancock.,**1917**,Elliptic Integrals, Mathematical Monographs, No.18, first edition, New York.

[15] H.Hancock ,**1958**, Lectures on the theory of Elliptic Functions, NewYork, Dover.

[16] G.H.Hardy and E.M.Wright,**1979**, An Introduction to The Theory of Numbers, fifth edition ,Oxford,Oxford University Press.

[17] Ivan Niven , January **1943**, On Elliptic Integrals, Amer. Math. Monthly,Vol.50, Number 1,pp.41-42

[18] Jamie Snape ,**2004**, Applications of Elliptic Functions in Classical and Algebraic Geometry, Master thesis

[19] Jean-Pierre Tigonal ,**2001**,Galois' Theory of Algebraic Equations, world scientific.

[20] John B.Conway ,**1978**, Functions of Complex Variable, second edition, Springer.

[21] Joseph Bak and Donald J.Newman ,**1997**,Complex Analysis, second edition, Springer.

[22] A.C.King , J.Billingham and S.R.Oho ,**2003**, Differential Equations, Cambridge University Perss.

[23] Liang-Shin Hahn and Bernard Epstein ,**1996**,Classical Complex Analysis, Jones and Bartlett Publishers,Inc.

[24] A.L.Markushevich ,**1967**, Theory of Functions of a Complex Variable, Vol.1, Prentice-Hall,Inc.

[25] A.L.Markushevich ,**1967**, Theory of Functions of a Complex Variable,Vol.3, Prentice-Hall,Inc.

[26] Natalia Archinard , **2000**, Abelian Varietes and Identities for Hypergeometric Series, PhD thesis.

[27] S.L.Oiu and M.Vuorinen ,**2005**, Special functions in geometric function theory. In Handbook of Complex Analysis :Geometric Function Theory,Vol.2,pp.621-659.

[28] Paul F.Byrd and Morris D.Friedman ,**1971**, Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists.Springer-Verlag.

[29] S.Ponnusmy and Herb Silverman ,**2006**, Complex Variables with Applications, Birkhauser.

[30] V.,Prasolov and Y.,Solovyev ,**1997**, Elliptic Functions and Elliptic Integrals, Translation of Mathematical Monographs,Vol.170,American Mathematical Society.

[31] V.,Prasolov ,**2004**, Polynomials, Translated from Russian by Dimitry Leites, Springer-Verlag.

[32] Peter L.Walker ,**2003**, The Analyticity of Jacobian Functions with Respect to The Parametric k, Mathematical Engineering Sciences, Vol.459, No.2038,pp.2569-2574.

[33] Peter L.Walker ,**2009,** The Distribution of zeros of Elliptic Functions with Respect to The Parameter k,Computational Methods and Function Theory,Vol.9,No.2,pp.579-591

[34] D.A.Pellett, Nov.**1967**, Derivatives of the Jacobi Elliptic Functions, Amer. Math. Monthly, Vol.74, No.9, pp.1083

[35] W.Rudin ,**1987**, Real and Complex Analysis, third edition , McGraw-Hill.

[36] E.D.Rainville ,**1960**, Special Functions, The Macmillan Company , New York.

[37] Robin K.S.Hankin ,**2006**, Introducing elliptic, an R Package for Elliptic and Modular Functions, Journal of Statistical Software,Vol.15, Issue 7,pp.1-22.

[38] S.Saks and A.Zygmund ,**1952**, Analytic Functions, Monorafie Matematyczne.

[39] Serge Lang ,**1999**, Complex Analysis, fourth edition ,Springer.

[40] J.-P.Serre ,**1973**, A Course in Arithmetic,GTM7, Berlin, Springer-Verlag.

[41] A.Schett ,**1976**, properties of the Taylor series expansion coefficients of the Jacobian elliptic functions,Math.Comp.,Vol.30,No.133,pp.143-147.

[42] _______, **1977**, Addendum to properties of the Taylor series expansion coefficients of the Jacobian functions, Math.Comp.,Vol.31, No.137.

[43] _______, **1977**, Recurrence formulae of the Taylor series expansion coefficients of the Jacobian elliptic functions, Math.Comp.,Vol.30,No.140,pp.1003-1005.

[44] Tom M.Apostol ,**1989**, Modular Function and Dirichlet Series in Number Theory , Springer –verlag .

[45] Tom M.Apostol ,**1976**,Introduction to Analytic Number Theory,Springer-Verlag.

[46] S.G.Vladut ,**1991**,Kronecker's Jugendtraum and Modular Functions,Study in the Development of Modern Mathematics,Vol.2,New York, Gordan and Breach Science Publications.

[47] Z.X.Wang and D.R.Guo ,**1989**, Special Functions ,World Scientific, Translated by D.R.Guo and X.J.Xia.

[48] E.T.Whittaker and G.N.Waston ,**1927**, A Course of Modern Analysis, fourth edition, Cambridge University Press.

[49] Wissam Raji ,**2007**, A New Proof of The Transformation Law of Jacobi's Theta Function $\theta_3(z,\tau)$,American Mathematical Society, Vol.135,Number10,pp.3127-3132.

[50] ف.ي. سمير نوف ، **1962**، دروس في الرياضيات العالية[1]، الجزء الثالث، ترجمة و. القدسي، ص. الأحمد، م. دعبول، خ. الأحمد، أ. كنجو، مطبعة جامعة دمشق.

[51] د. موفق دعبول،**1981**، التحليل 6، منشورات جامعة دمشق.

[52] د. موفق دعبول،**1981**، التحليل 7، منشورات جامعة دمشق.

[1] تُرجم كتاب دروس في الرياضيات العالية من الروسية إلى الإنكليزية و الفرنسية و العربية، و هو من خمسة أجزاء و كل جزء يضم قسمين على الأقل ، و مرجعنا بالإنكليزية هو:
V.I..Smirnov, A Course On Higher Mathematics, Vol.3, Part 2.

[53] د. عمران قوبا،**2004**، التحليل العقدي ، منشورات جامعة دمشق.

[54] د. محمد الشيخ و محمد سعود الكوسى، **2010**، إثبات مبسط لمسألة العكس في نظرية الدوال الناقصية، مجلة جامعة دمشق، المجلد 26، العدد الأول، الصفحات 106-97 .

للاستزادة و الاطلاع:

Andrew Wiles ,**1995** , Modular Elliptic Curve and Fermat's Last Theorem ,The Annals of Mathematics ,Vol.141,No.3,pp.443-551

T.M.Apostol ,**1976**, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag.

Emil Grosswald ,**1984**,Topics from the Theory of Numbers.

Gino Moretti, **1968**, Functions of a Complex Variable, Perntice-Hall of India Private Limited.

J.E.Hacke,Jr., **1941**, A simple solution of the general quartic, Amer. Math. Monthly, vol.48, pp. 327-328

Joseph H.Silverman ,**1986**, The Arithmetic of Elliptic Curves , Springer.

D.H.Lehmer ,**1965**, The Primality of Ramanujan's Tau-Function , Amer. Math. Monthly,Vol.72,No.2 ,pp.15-18

Morton J.Hellman ,**1958**, A unifing technique for the solution of the quadratic, cubic and quartic, Amer. Math. Monthly,vol.65, pp.274-276

Natha J.Fine , January **1990**, Basic Hypergeometric Series and Applications, Amer. Math. Monthly ,vol.97, number 1, pp.82-88.

Pavan K.Malhotra ,**1958**, A New Method of Solving a Quartic, Amer.Math.Monthly, vol.65, pp.280-282

Steven R.Finch ,**2003** , mathematical Constants ,Cambridge University Press